

N° D'ORDRE :

1524.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR M. A. JUPEAU,

Professeur agrégé au Lycée de Poitiers.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CAUSTIQUES OBTENUES AVEC LES SYSTÈMES
OPTIQUES CENTRÉS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *12 d/br* 1913, devant la Commission d'examen.

MM. BOUTY,

H. LE CHATELIER,

CARTAN,

COTTON,

Président.

Examineurs.



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

1913

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

N° D'ORDRE :

1524.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR M. A. JUPEAU,

Professeur agrégé au Lycée de Poitiers.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CAUSTIQUES OBTENUES AVEC LES SYSTÈMES
OPTIQUES CENTRÉS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1913, devant la Commission d'examen.



MM. BOUTY,
H. LE CHATELIER,
CARTAN,
COTTON,

Président.

Examineurs.



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

1913

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i>	P. APPELL, <i>Prof.</i>	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
<i>Doyen honoraire</i> ...	G. DARBOUX. —	Géométrie supérieure.
<i>Professeurs honor.</i> }	Ch. WOLF.	
	J. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique math. et calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	Y. DELAGE.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	Gaston BONNIER.	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KÖNIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
	GOUSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
<i>Professeurs</i>	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER.	Chimie.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE...	Physique générale.
	GAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	Emile BOREL...	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	Jean PERRIN...	Chimie-physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	H. ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
	Cl. GUICHARD...	Mathématiques générales.
	N.....	Application de l'analyse à la géométrie.
	N.....	Histologie.
	PUISEUX.....	Mécanique et astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	Léon BERTRAND..	Géologie.
<i>Professeurs-adj.</i> ...	Rémy PERRIER..	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PÉREZ.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
<i>Secrétaire</i>	D. TOMBECK.	

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CAUSTIQUES

OBTENUES AVEC LES

SYSTÈMES OPTIQUES CENTRÉS

PAR M. A. JUPEAU,

Professeur agrégé au Lycée de Poitiers.



INTRODUCTION.

Je me propose d'étudier dans ce travail la surface caustique donnée par un système centré, dans le cas général où les rayons lumineux sont issus d'un point situé hors de l'axe du système et dans son voisinage. Ce problème a été traité théoriquement par M. Finsterwalder en 1892⁽¹⁾; la solution que je donne est différente; elle est établie, d'une part, sans passer par l'intermédiaire des formules assez compliquées de Seidel, et, d'autre part, sans recourir à la résolution d'une équation différentielle approchée. J'y joins en outre une série de vérifications expérimentales qui fixent les limites dans lesquelles cette solution est valable. Les résultats trouvés ne sont pas complètement d'accord avec ceux de M. Finsterwalder. Je montrerai les divergences et les raisons que j'ai de penser que, dans cette étude, les approximations concernant les résultats sont mieux définies, parce qu'elles sont indépendantes de la résolution de l'équation différentielle approchée signalée plus haut.

L'intérêt de ces recherches est multiple. En premier lieu, la surface caustique est une surface parfaitement définie dont l'importance physique est considérable, quel

⁽¹⁾ S. FINSTERWALDER, *Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder* (Muench. Abhand. der k. bayer. Akademie der Wiss., II, Cl. XVII, Bd. III, Abth 519-587).

que soit le point de vue auquel on se place, celui de l'optique géométrique ou celui de l'optique ondulatoire. Les résultats auxquels on parvient sont rigoureusement exacts, à la condition de n'envisager la caustique que comme un lieu de concentration particulière d'énergie. Le point de vue géométrique ne conduit à des résultats illusoire qu'au moment où l'on se propose l'étude de l'intensité lumineuse dans un plan de section. C'est alors qu'il faut adopter le point de vue ondulatoire et entrer dans la voie suivie notamment par Airy⁽¹⁾. En somme, seules les propriétés de la surface caustique varient avec le point de vue. Dans le premier cas, elle se présente comme surface séparant un espace éclairé d'un espace sombre; elle constitue une limite infranchissable pour l'énergie rayonnante. Dans le deuxième cas, elle perd ce caractère de frontière, mais elle se présente encore comme lieu de concentration particulière d'énergie, lieu séparant deux espaces où l'intensité moyenne est différente.

Cette surface nous est fournie directement et facilement par l'expérience, ce qui permet de vérifier les résultats du calcul ou de déterminer les écarts provenant des approximations faites dans ces calculs. A cet égard, il est fort intéressant de pouvoir matérialiser en quelque sorte des prédictions exclusivement géométriques. En outre cette réalisation donne lieu à de forts beaux phénomènes très simples à observer.

En dernier lieu, un travail semblable est utile au point de vue pratique, celui de l'optotechnique. En effet, un principe parfois suivi dans la construction des différents systèmes optiques, consiste à diviser les corrections à effectuer en deux groupes. La première partie d'un système fait correspondre à un point lumineux objet P_1 une certaine surface caustique C_1 ; une deuxième partie fait correspondre à un point image P_2 une surface caustique C_2 . P_2 sera rigoureusement l'image de P_1 à travers tout le système, si les deux parties de ce système sont construites de telle sorte que C_1 et C_2 coïncident. C'est le principe adopté par exemple dans les projecteurs du colonel Mangin.

Le travail suivant, comme tout ce qui concerne l'optique géométrique, s'éloigne quelque peu des voies ordinairement suivies par les physiciens français. Les recherches dans une semblable direction n'attirent pas en général; elles sont longues, pénibles et on s'en éloigne volontiers tant le bénéfice qu'on en peut retirer paraît lointain. Si l'on consulte le catalogue de notre littérature sur ces questions, on le trouve bien pauvre en comparaison de ce qui s'est fait à l'étranger, notamment en Allemagne. A la vérité, nous n'avons pas encore un traité d'optique géométrique moderne, et ceux qui veulent se mettre au courant de l'état actuel de cette science

(¹) AIRY, *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic* (Trans. Cambr. Soc., 1838, pp. 379-402, 595-600).

J. MACÉ DE LÉPINAY, *Sur les franges des caustiques et les arcs surnuméraires de l'arc-en-ciel* (Annales de la Faculté des Sciences de Marseille, 1898; Journal de Physique, t. VII, 3^e série, p. 209).

doivent faire l'effort de lire des ouvrages comme ceux de M. von Rohr. Il y a quelques années, M. Pelletan exprimait d'assez vifs à ce propos dans le *Journal de Physique*⁽¹⁾. C'est en effet, au moins en partie, cette insuffisance d'écrits et d'enseignement qui nous rend tributaire de nos voisins au point de vue de l'optotechnique. Le physicien qui consentirait à publier un traité dans le genre de celui cité plus haut, faisant ainsi passer dans notre langue l'essentiel des écrits étrangers, rendrait un service notable à ceux que ne rebute pas l'optique géométrique.

Le Mémoire que je présente peut être considéré comme l'une des deux formes sous lesquelles on peut aborder les problèmes posés par l'optique géométrique. On peut en effet procéder rigoureusement, n'admettre aucune approximation, c'est la façon de faire de M. A. Gullstrand. Cette méthode est sûre, mais elle est lente et trop souvent elle se heurte à des difficultés insurmontables. Il faut, outre la patience, une science rare en géométrie infinitésimale pour obtenir le moindre résultat ayant une valeur pratique, et ce qu'a obtenu, en particulier, le savant professeur d'Upsala, représente le fruit de vingt-cinq années de labeur⁽²⁾.

On peut, en deuxième lieu, faire comme je l'ai fait, après nombre de physiciens, traiter par échelons les problèmes qui se posent; c'est la façon de Abbe. Cette façon est peut-être critiquable au point de vue de la géométrie pure, mais c'est la vraie méthode importante pour le physicien, c'est celle qui donne le plus vite et en plus grande quantité des résultats pratiques. Une solution approximative vaut infiniment mieux que pas de solution. La seule précaution à prendre, précaution qu'on ne doit pas perdre de vue, c'est de ne pas déduire des résultats obtenus des conséquences trop lointaines, incompatibles avec les approximations faites. C'est la non-observation de cette règle qui a souvent conduit à une précision illusoire. Il est inutile, par exemple, dans ce Mémoire, de pousser plus loin que la deuxième approximation la résolution de l'équation du deuxième ordre qui se trouve au chapitre II.

Je dois à la bienveillance de M. le Doyen GARBE d'avoir pu facilement réaliser les planches qui illustrent ce travail et déterminer les différentes constantes utilisées au chapitre VIII. Qu'il me permette de lui en exprimer ici toute ma gratitude.

(1) Je dois noter ici que M. J. BLEIN vient de répondre en partie au désir que j'exprime en faisant paraître son excellent précis d'« Optique géométrique ».

(2) ALLVAR GULLSTRAND, *Allgemeine theorie der monochromatischen aberrationen und ihre nächsten ergebnisse für die Ophthalmologie*.

PLAN

Dans un premier chapitre, je rappelle les résultats généraux de la théorie des caustiques et je montre comment la symétrie du système optique considéré peut renseigner sur la forme générale de la caustique.

Au deuxième chapitre, je considère le cas simple de la réfraction à travers un dioptré sphérique unique et je recherche quelle forme on doit donner aux diaphragmes pour isoler les normales développables formées par les rayons lumineux après leur réfraction. L'équation à laquelle je parviens n'est pas celle des coniques homofocales obtenue par M. Finsterwalder. Je déduis de cette équation la solution cherchée compatible avec les approximations faites pour établir l'équation elle-même.

Dans le troisième chapitre, je détermine l'équation de la caustique par deux méthodes et je montre l'accord entre les résultats obtenus et ceux que l'on peut prévoir *a priori*.

Dans le quatrième chapitre, je traite, avec une première approximation, pour deux dioptrés, le problème résolu au chapitre II pour un dioptré unique. Les formules trouvées sont identiques, ainsi que les conséquences que l'on en peut déduire.

Au cinquième chapitre, j'envisage le cas général d'un système centré quelconque avec la même approximation que précédemment et j'aboutis encore à la même forme d'équation, par suite à des conséquences analogues.

Dans le sixième chapitre, je pousse l'approximation à un ordre supérieur en ce qui concerne une lentille.

Au septième chapitre, figurent les résultats de l'étude expérimentale d'une caustique dans le cas particulier d'une lentille plan-convexe, ainsi qu'un procédé pour déterminer l'indice d'un solide transparent.

Dans un dernier chapitre, j'utilise les résultats précédents pour fixer les domaines dans lesquels les deux solutions obtenues sont valables.

CHAPITRE PREMIER

Résultats généraux de la théorie des caustiques.

D'après un théorème dû à Malus⁽¹⁾ et généralisé successivement par Cauchy, Dupin, Gergonne et Quételet, on peut énoncer la proposition suivante :

Si des rayons lumineux traversant une série de milieux isotropes sont normaux à une surface, ils ne cessent pas de conserver cette propriété après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

En particulier, si ces rayons lumineux sont issus d'un point, ils sont dans un premier milieu normaux à des sphères; ils sont par suite, d'après le théorème précédent, normaux à une famille de surfaces parallèles, après qu'ils ont subi un nombre quelconque de réflexions ou réfractions. Autrement dit, des rayons lumineux primitivement isogènes constituent, après la traversée d'un système optique quelconque formé de milieux isotropes, une *congruence de normales*. Les surfaces normales aux droites de la congruence sont dites *surfaces orthotomiques* ou *surfaces d'onde*.

On démontre, d'autre part, en géométrie, que toute droite D d'une congruence appartient à deux surfaces développables dont les génératrices sont également des droites de la congruence. A ces développables correspondent deux arêtes de rebroussement, γ_1 et γ_2 , tangentes à D en deux points F_1 et F_2 , appelés *points focaux* ou *foyers* de la droite D. Le lieu des points F_1 et F_2 constitue les deux nappes Σ_1 et Σ_2 d'une surface dite *surface focale* ou *caustique*. Cette surface peut encore être considérée comme le lieu des arêtes de rebroussement γ_1 et γ_2 . Les deux plans P_1 et P_2 , qui passent par D et sont tangents en F_1 et F_2 aux deux nappes de la surface focale, sont dits *plans focaux*. Ces plans sont tels, que P_1 tangent à Σ_2 en F_2 est osculateur à γ_1 en F_1 et que P_2 tangent à Σ_1 en F_1 est osculateur à γ_2 en F_2 .

(1) MALUS, *Journal de l'École Polytechnique*, cah. XIV, 1^{re} série, p. 1.

La propriété caractéristique des congruences de normales (seul cas qui nous occupe) est que les plans focaux P_1 et P_2 sont rectangulaires. Ces plans focaux coïncident, par suite, avec les plans des sections principales d'une surface d'onde quelconque (S) au point M , trace sur cette surface de la droite D considérée. Il en résulte que les deux surfaces développables passant par D coupent la surface d'onde suivant

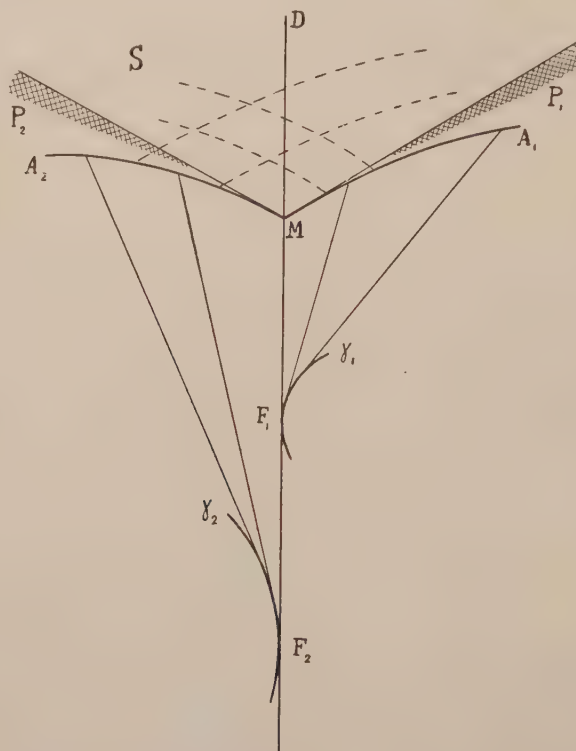


FIG. 1.

les deux lignes de courbure A_1 et A_2 passant par M . A la développable qui s'appuie sur A_1 correspond l'arête de rebroussement γ_1 , dont le plan osculateur est P_1 . A la développable qui s'appuie sur A_2 correspond l'arête de rebroussement γ_2 , dont le plan osculateur est P_2 . Les arêtes de rebroussement γ_1 et γ_2 peuvent être considérées comme les enveloppes des rayons D quand M parcourt A_1 et A_2 . Dès lors, les points F_1 et F_2 sont les centres de courbure principaux de la surface d'onde en M et l'ensemble des deux nappes de caustique Σ_1 et Σ_2 constitue la développée de toute surface d'onde, telle que S , située dans un même milieu.

De ce que le plan osculateur P_1 de γ_1 en F_1 est normal au plan P_2 tangent à Σ_2 en F_1 , il résulte que γ_1 appartient à l'une des familles de lignes géodésiques de Σ_1 . De même, γ_2 appartient à l'une des familles de lignes géodésiques de Σ_2 . Il y a ainsi

correspondance, point par point, entre une surface d'onde et sa développée; aux lignes de courbure de la première correspond une famille de géodésiques de la dernière.

L'importance optique du groupement des rayons lumineux en surfaces développables vient du fait que, pour de semblables groupements, la rencontre des rayons est plus intime que pour tout autre. En associant une droite à chaque point d'une courbe gauche, on peut obtenir une surface réglée. Dans le cas où la droite associée est la tangente à la courbe, la surface engendrée est développable et l'arête de rebroussement de cette dernière est la courbe qui sert de support. Si l'on prend comme infiniment petit du premier ordre un élément d'arc de la courbe, on démontre que la distance entre deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre ou du premier, suivant que la surface est développable ou simplement réglée. C'est donc sur les arêtes de rebroussement des développables, c'est-à-dire sur les lignes telles que γ_1 et γ_2 , et par suite sur les nappes de caustique, que les rayons lumineux se rencontrent le mieux possible. La considération des faisceaux développables sera par suite très supérieure à celle des faisceaux plans que considère la théorie élémentaire. La caustique apparaît ainsi comme « lieu de concentration d'énergie ».

Pour des formes particulières de surface d'onde, la surface focale peut se simplifier.

La caustique se réduit à *un point* pour des surfaces d'onde sphériques; c'est le cas d'un faisceau isogène réfléchi sur un miroir plan.

La caustique se réduit à *deux courbes* dans le cas où les surfaces d'onde sont des cyclides de Dupin ⁽¹⁾ (surface, en général, du quatrième ordre, qu'on peut considérer comme l'enveloppe d'une sphère variable restant tangente à trois sphères fixes, ou encore comme la transformée d'un tore par rayons vecteurs réciproques). Dans le cas particulier où la cyclide dégénère en un tore, les deux lignes caustiques sont une droite et une circonférence. On réalise une surface d'onde de ce genre en utilisant un miroir de révolution dont la méridienne est une ellipse et l'axe de révolution une droite normale au grand axe de cette ellipse et passant par un de ses foyers. En plaçant un point lumineux à ce foyer, on obtient des surfaces d'onde réfléchies en forme de tore et une caustique formée de l'axe de révolution et de la circonférence lieu des centres du cercle méridien qui engendre le tore ⁽²⁾.

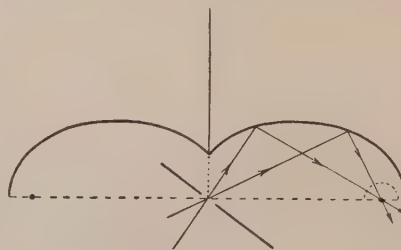


FIG. 2.

⁽¹⁾ CLERK MAXWELL, *On the cyclide* (The quarterly Journal of pure and applied mathematics, p. 111, 1868).

⁽²⁾ EVERETT, *Sur une ligne focale* (Collected Papers, vol. II, p. 144; Philosophical magazine, 1902, t. LIII, p. 483).

La caustique se réduit à *une courbe et une surface* dans le cas où les surfaces d'onde sont des surfaces enveloppes d'une famille de sphères dépendant d'un paramètre. Le centre de la sphère variable décrit la courbe caustique. Dans le cas particulier où cette courbe est une droite, la surface d'onde est évidemment de révolution autour de cette droite. Dans ces conditions, la deuxième nappe de caustique est aussi de révolution et s'obtient en faisant tourner la développée de la méridienne de la surface d'onde autour de la ligne caustique. La développée possède forcément un point de rebroussement sur l'axe de révolution. On réalise ce cas simple en considérant un système optique centré quelconque et un point lumineux objet situé sur l'axe du système; les ondes émergentes possèdent la symétrie indiquée plus haut et il leur correspond les deux nappes de caustiques décrites ci-dessus.

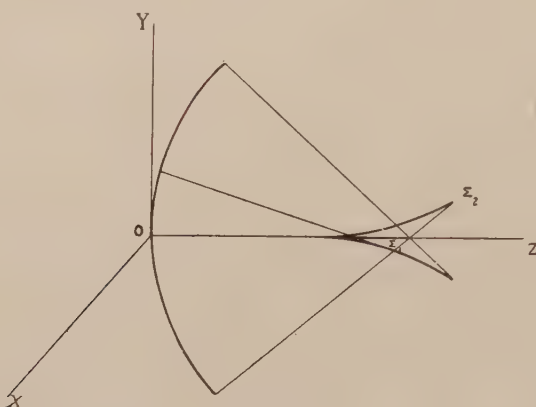


FIG. 3.

Dans le cas général où la caustique se compose de *deux surfaces*, il peut arriver que les surfaces d'onde présentent un certain degré de symétrie; ce qui permet de déduire immédiatement certains renseignements concernant leur caustique.

Le cas de surfaces d'onde possédant un plan de symétrie se trouve réalisé avec un système optique centré et un point lumineux objet pris hors de l'axe. Le plan P qui passe par l'axe du système et le point lumineux est plan de symétrie. Une surface d'onde émergente est nécessairement symétrique par rapport à P. L'intersection I de P avec cette surface appartient nécessairement à l'une des familles de ses lignes de courbure. L'autre famille coupe I orthogonalement et à l'intersection la courbure de ces lignes est maximum ou minimum. Il en résulte :

1° Que l'une des familles de normales développables (surfaces développables engendrées par les normales à une surface) comprend le plan de symétrie auquel correspond une arête de rebroussement plane, courbe suivant laquelle une première nappe de caustique coupe orthogonalement le plan P.

2° Que la deuxième famille de normales développables admet des arêtes de rebroussement présentant un point de rebroussement dans le plan P. C'est dire que la deuxième nappe de caustique se divise en deux parties se raccordant tangentielle-ment suivant le plan P.

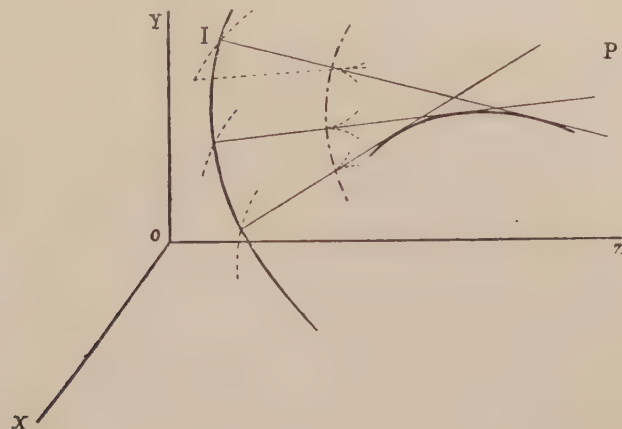


FIG. 4.

Le cas de surfaces d'onde possédant deux plans de symétrie est réalisé avec les ondes qui émergent d'une lentille cylindrique, à la condition que ces ondes proviennent d'un point situé sur une droite passant par les centres de courbure d'une section

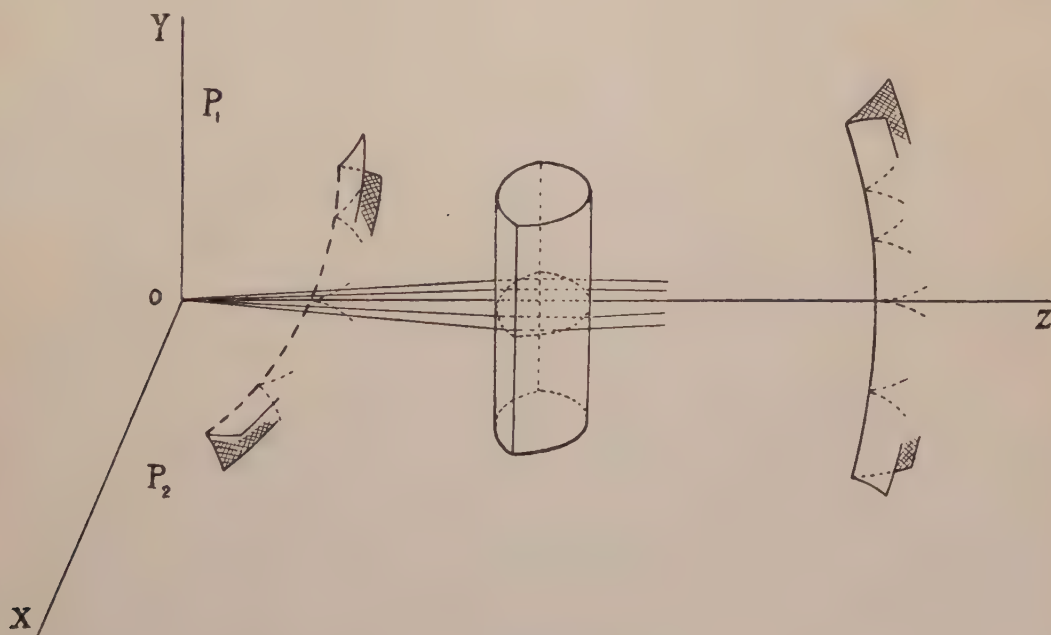


FIG. 5.

droite. Une telle droite est dite l'axe de la lentille; elle est normale aux génératrices des deux surfaces cylindriques qui limitent la lentille. Les deux plans de symétrie sont deux plans forcément rectangulaires qui se coupent suivant l'axe de la lentille : l'un P_1 est perpendiculaire aux génératrices de la lentille et l'autre P_2 leur est parallèle. Ce qui a été dit au paragraphe précédent s'applique encore ici, et il en résulte que chacune des deux nappes de caustique se divise en deux morceaux se raccordant tangentiellement dans chacun des plans P_1 et P_2 . Les deux arêtes de raccordement sont ainsi planes; celle située dans P_1 coupe orthogonalement P_2 et *vice versa*.

On peut réaliser le cas de surfaces d'onde possédant une infinité de plans de symétrie en utilisant une lentille cylindrique et un faisceau de lumière parallèle, la direction d'incidence étant normale aux génératrices de la lentille. Tout plan perpendiculaire aux génératrices est plan de symétrie. Les surfaces d'onde émergentes sont cylindriques, puisqu'elles doivent avoir la même symétrie. Leurs génératrices sont parallèles à celles de la lentille. Les deux systèmes de normales développables sont deux familles de plans perpendiculaires et parallèles aux génératrices de la lentille. L'un des systèmes d'arêtes de rebroussement s'éloigne à l'infini; l'autre demeure à distance finie et engendre une nappe de caustique qui, elle aussi, est cylindrique avec génératrices encore parallèles à celles de la lentille.

CHAPITRE II.

Réfraction à travers un dioptre sphérique.

Soit le dioptre sphérique S_1 de centre C_1 séparant deux milieux d'indices μ_0 et μ_1 . (On suppose une lumière monochromatique.)

R_1 désigne le rayon du dioptre sphérique; il est compté positivement dans le sens de Oz . (Cas de la figure.)

x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de la source lumineuse A_0 .

x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point A_1 , où un rayon subit la réfraction. (On a pris ici comme axe Oz un des diamètres du dioptre.)

Nous considérerons $x_0, y_0, \frac{1}{z_0}, x_1, y_1$ comme grandeurs du 1^{er} ordre et nous négligerons, dans ce chapitre, les grandeurs d'ordre supérieur à 4.

L'équation de la surface S_1 est :

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - R_1)^2 - R_1^2 = 0,$$

ou, au 6^e ordre près,

$$z_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} + \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^3}.$$

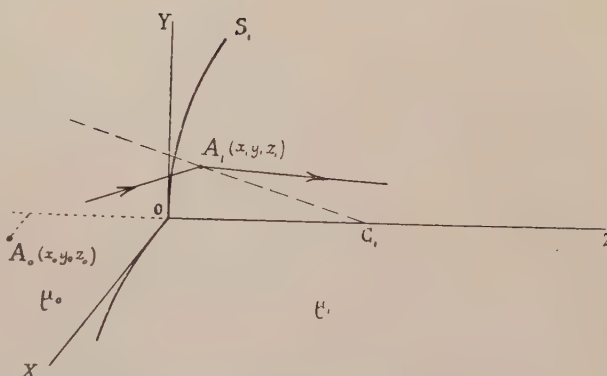


FIG. 6.

Les cosinus directeurs de la normale en A_1 sont :

$$L_1 = -\frac{x_1}{R_1}, \quad M_1 = -\frac{y_1}{R_1}, \quad N_1 = 1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1^2} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^4}.$$

Les deux premiers sont calculés rigoureusement, le dernier au 6^e ordre près.

Les cosinus directeurs du rayon incident $A_0 A_1 (l_0, m_0, n_0)$ sont :

$$l_0 = -\frac{x_1 - x_0}{z_0}, \quad m_0 = -\frac{y_1 - y_0}{z_0}, \quad n_0 = 1 - \frac{l_0^2 + m_0^2}{2},$$

en négligeant les grandeurs d'ordre ≥ 5 .

Équations optiques en A_1 .

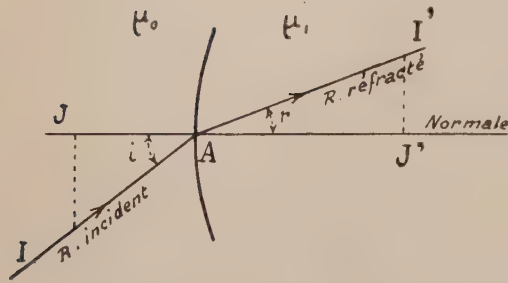


FIG. 7.

Prenons comme plan d'incidence le plan de la feuille; la première loi de Descartes indique que le rayon réfracté sera également dans ce plan; la deuxième loi s'exprime par :

$$\mu_0 \sin i = \mu_1 \sin r.$$

Prenons sur le rayon réfracté $AI' = \mu_1$ et sur le rayon incident $AI = \mu_0$. Menons IJ perpendiculairement à JA et $I'J'$ perpendiculairement à $J'A$. D'après les deux lois précédentes, IJ est égal et parallèle à $I'J'$. Il en est de même de leurs projections sur un axe quelconque. Par suite

$$\text{proj}(IJ) = \text{proj}(IA) + \text{proj}(AJ) = \text{proj}(J'A) + \text{proj}(AI'),$$

ou :

$$\text{proj}(AI') - \text{proj}(IA) = \text{proj}(AJ) - \text{proj}(J'A) = -\text{proj}(JA) + \text{proj}(AJ').$$

Sur l'axe Ox , on obtient, en désignant les cosinus directeurs du rayon réfracté par l_1, m_1, n_1 :

$$\mu_1 l_1 - \mu_0 l_0 = \mu_1 \cos r \cdot L_1 - \mu_0 \cos i \cdot L_1,$$

d'où :

$$\frac{\mu_1 l_1 - \mu_0 l_0}{L_1} = \mu_1 \cos r - \mu_0 \cos i.$$

De même sur l'axe Oy :

$$\frac{\mu_1 m_1 - \mu_0 m_0}{M_1} = \mu_1 \cos r - \mu_0 \cos i;$$

et sur l'axe Oz :

$$\frac{\mu_1 n_1 - \mu_0 n_0}{N_1} = \mu_1 \cos r - \mu_0 \cos i.$$

Finalement,

$$\frac{\mu_1 l_1 - \mu_0 l_0}{L_1} = \frac{\mu_1 m_1 - \mu_0 m_0}{M_1} = \frac{\mu_1 n_1 - \mu_0 n_0}{N_1} = \mu_1 \cos r - \mu_0 \cos i,$$

ou, en posant :

$$\begin{aligned} \mu_1 l_1 &= \mathcal{L}_1, \quad \mu_0 l_0 = \mathcal{L}_0, \text{ etc.}, \\ \frac{\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0}{L_1} &= \frac{\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_0}{M_1} = \frac{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_0}{N_1} = \mu_1 \cos r - \mu_0 \cos i = \mathfrak{H}_1. \end{aligned}$$

Ces équations sont la forme analytique sous laquelle nous considérerons les lois de Descartes; elles forment ce que nous appellerons les équations optiques en A_1 . On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \mathfrak{H}_1 L_1 + \mathcal{L}_0, \\ \mathcal{M}_1 &= \mathfrak{H}_1 M_1 + \mathcal{M}_0, \\ \mathcal{N}_1 &= \mathfrak{H}_1 N_1 + \mathcal{N}_0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{L}_1^2 &= \Sigma (\mu_1 l_1)^2 = \mu_1^2 \Sigma l_1^2 = \mu_1^2, \\ \Sigma (\mathfrak{H}_1 L_1 + \mathcal{L}_0)^2 &= \mathfrak{H}_1^2 + 2 \mathfrak{H}_1 \Sigma L_1 \mathcal{L}_0 + \mu_0^2 = \mathfrak{H}_1^2 + 2 \mathfrak{H}_1 \mu_0 \Sigma L_1 l_0 + \mu_0^2; \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathfrak{H}_1^2 + 2 \mu_0 \mathfrak{H}_1 \Sigma L_1 l_0 + \mu_0^2 - \mu_1^2 = 0.$$

Or :

$$\Sigma L_1 l_0 = -\frac{x_1}{R_1} l_0 - \frac{y_1}{R_1} m_0 + \left[1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1^2} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^4} \right] \left(1 - \frac{l_0^2 + m_0^2}{2} \right),$$

ou, ne conservant que les termes d'ordre 4 :

$$\Sigma L_1 l_0 = 1 - \underbrace{\left[\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1^2} \right]}_{\text{ordre 2}} + \underbrace{\left[\frac{x_1 l_0}{R_1} + \frac{y_1 m_0}{R_1} \right]}_{\text{ordre 3}} + \underbrace{\left[\frac{l_0^2 + m_0^2}{2} + \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^4} \right]}_{\text{ordre 4}},$$

ou, en posant :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1^2} + \frac{x_1 l_0}{R_1} + \frac{y_1 m_0}{R_1} + \frac{l_0^2 + m_0^2}{2} + \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^4}; \\ \Sigma L_1 l_0 &= 1 - \varphi_1. \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_i &= -\mu_0(1 - \mu_i) \pm \sqrt{\mu_0^2(1 - \varphi_i)^2 + \mu_i^2 - \mu_0^2}, \\ \mathfrak{H}_i &= -\mu_0(1 - \varphi_i) \pm \mu_i \left(1 - 2 \frac{\mu_0^2}{\mu_i^2} \varphi_i + \frac{\mu_0^2}{\mu_i^2} \varphi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Si dans les équations qui donnent $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{M}_i$ on néglige les grandeurs d'ordre > 4 , il suffit de déterminer $\mathfrak{H}_i$ au 4^e ordre près. On prendra :

$$\mathfrak{H}_i = -\mu_0(1 - \varphi_i) \pm \mu_i \left(1 - \frac{\mu_0^2}{\mu_i^2} \varphi_i \right).$$

La seule valeur acceptable pour $\mathfrak{H}_i$ est celle qui tend vers $\mu_i - \mu_0$, car pour $i=0$, $r=0$ et $\mathfrak{H}_i = \mu_i - \mu_0$.

D'où :

$$\mathfrak{H}_i = \mu_i - \mu_0 + \frac{\mu_0}{\mu_i} (\mu_i - \mu_0) \varphi_i,$$

avec :

$$\varphi_i = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R_i^2} + \frac{x_i l_0}{R_i} + \frac{y_i m_0}{R_i}.$$

La première équation optique devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i &= -\frac{\mu_i - \mu_0}{R_i} x_i - \frac{\mu_0(\mu_i - \mu_0)x_i(x_i^2 + y_i^2)}{2\mu_i R_i^3} \\ &\quad - \frac{\mu_0(\mu_i - \mu_0)x_i^2 l_0}{\mu_i R_i^2} - \frac{\mu_0(\mu_i - \mu_0)x_i y_i m_0}{\mu_i R_i^2} - \frac{\mu_0(x_i - x_0)}{z_0}, \\ \mathcal{M}_i &= -\left[\frac{\mu_i - \mu_0}{R_i} + \frac{\mu_0}{z_0} \right] x_i + \mu_0 \frac{x_0}{z_0} \\ &\quad - \frac{\mu_0(\mu_i - \mu_0)}{2\mu_i R_i^3} x_i(x_i^2 + y_i^2) + \frac{\mu_0(\mu_i - \mu_0)}{\mu_i R_i^2 z_0} x_i[x_i^2 + y_i^2 - (x_i x_0 + y_i y_0)].\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}a &= -\left[\frac{\mu_i - \mu_0}{R_i} + \frac{\mu_0}{z_0} \right], \\ b &= -\frac{\mu_0}{z_0}, \\ p &= \frac{\mu_0(\mu_0 - \mu_i)}{2\mu_i R_i^3},\end{aligned}$$

l'équation précédente devient :

$$\mathcal{L}_i = ax_i - bx_0 + px_i(x_i^2 + y_i^2) - \frac{2pR_i}{z_0} x_i[x_i^2 + y_i^2 - (x_i x_0 + y_i y_0)].$$

De même, on obtiendrait :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}_1 &= ay_1 - by_0 + Py_1(x_1^2 + y_1^2) - \frac{2PR_1}{z_0} y_1 [x_1^2 + y_1^2 - (x_1x_0 + y_1y_0)], \\
 \mathbb{W}_1 &= \mu_1 n_1 = \mu_1 \left[1 - (l_1^2 + m_1^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \mu_1 \left[1 - \frac{l_1^2 + m_1^2}{2} - \frac{(l_1^2 + m_1^2)^2}{8} \right] \\
 &= \mu_1 - \frac{l_1^2 + m_1^2}{2\mu_1} - \frac{(l_1^2 + m_1^2)^2}{8\mu_1^3} \\
 &= \mu_1 - \frac{a^2(x_1^2 + y_1^2)}{2\mu_1} + \frac{ab(x_1x_0 + y_1y_0)}{\mu_1} - \frac{b^2(x_0^2 + y_0^2)}{2\mu_1} - \frac{a}{\mu_1} \left(P + \frac{a^3}{8\mu_1^2} \right) (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

Remarquons que a et P sont finis, alors que b est du 1^{er} ordre. Si l'on se limite au 3^e ordre, les équations optiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_1 = ax_1 - bx_0 + Px_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \mathbb{L}_1 = ay_1 - by_0 + Py_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \mathbb{W}_1 = \mu_1 - \frac{a^2(x_1^2 + y_1^2)}{2\mu_1} + \frac{ab(x_1x_0 + y_1y_0)}{\mu_1}. \end{cases}$$

Condition à satisfaire pour qu'une normale de rayons réfractés soit développable.

Courbes directrices du faisceau incident.

Les équations d'un rayon réfracté sont :

$$\frac{X - x_1}{\mathfrak{L}_1} = \frac{Y - y_1}{\mathbb{L}_1} = \frac{Z - z_1}{\mathbb{W}_1}.$$

Les coordonnées x_1, y_1 d'une courbe située sur S_1 et telle que le pinceau issu de A_0 et s'appuyant sur cette courbe forme, après réfraction, une surface développable, doivent satisfaire à la condition :

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ \mathfrak{L}_1 & \mathbb{L}_1 & \mathbb{W}_1 \\ d\mathfrak{L}_1 & d\mathbb{L}_1 & d\mathbb{W}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons x_1 comme variable indépendante et faisons $y_0 = 0$, ce qui revient à prendre comme plan ZOX le plan passant par A_0 . On a alors :

$$(1) \quad \left\| y_1'^2 y_1 (Ax_1 - Cx_0) + y_1' \{ A(x_1^2 - y_1^2) - (B + C)x_1 x_0 \} - y_1 (Ax_1 - Bx_0) \right\| = 0.$$

C'est là l'équation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées (x_1, y_1) de la courbe cherchée, c'est-à-dire les coordonnées de la projection de cette courbe sur le plan XOY. Cette équation diffère de celle des coniques homofocales obtenue par M. Finsterwalder. Il faudrait notamment que l'on eût $B = C$, ce qui impliquerait :

$$\frac{ab}{R_1} = -\frac{2PR_1\mu_1}{z_0} \quad \text{ou} \quad \frac{(\mu_1 - \mu_0)\mu_0}{R_1^2 z_0} + \frac{\mu_0^2}{R_1 z_0^2} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)\mu_0}{R_1^2 z_0},$$

et l'on voit que cette égalité n'est vérifiée qu'au 2^e ordre près.

Pour résoudre la précédente équation, je remarque qu'en faisant $x_0 = 0$, elle devient :

$$Ax_1 y_1 y_1'^2 + A(x_1^2 - y_1^2) y_1' - Ax_1 y_1 = 0$$

et qu'elle admet alors les solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 = c^{te}, \\ \frac{y_1}{x_1} = c^{te}. \end{array} \right.$$

La première correspond à une famille de circonférences concentriques dont le centre est l'origine. La deuxième représente une famille de droites concourantes issues de l'origine. Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*.

Lorsque x est $\neq 0$, mais petit, il est naturel d'admettre que les solutions cherchées correspondent à deux familles de courbes, l'une fermée tendant vers la forme circulaire, l'autre ouverte tendant vers la forme rectiligne, lorsque x_0 tend vers 0.

Recherche de la première famille.

Admettre ce qui précède, c'est supposer qu'il existe une solution de la forme :

$$y_1^2 = x - x_1^2 + x_0 \varphi_1 + x_0^2 \varphi_2 + \dots,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots$ étant des fonctions de x à déterminer qui dépendent, en outre, du paramètre α .

De l'égalité précédente, on tire :

$$\begin{aligned} 2y_1 y_1' &= -2x_1 + x_0 \varphi_1' + x_0^2 \varphi_2' + \dots, \\ y_1' &= -\frac{x_1}{y_1} + x_0 \frac{\varphi_1'}{2y_1} + x_0^2 \frac{\varphi_2'}{2y_1} + \dots, \\ (y_1')^2 &= \frac{x_1^2}{y_1^2} - x_0 \frac{x_1}{y_1^2} \varphi_1' + x_0^2 \left[\frac{\varphi_1'^2}{4y_1^2} - \frac{\varphi_2' x_1}{y_1^2} \right] + \dots \end{aligned}$$

Substituons dans (1) et identifions. Nous devons évaluer à 0 les coefficients des différentes puissances de x_0 . Ce que nous faisons ici revient en somme à résoudre l'équation posée par approximations successives :

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{x_1^2}{y_1^2} - x_0 \frac{x_1 \varphi_1'}{y_1^2} + x_0^2 \left[\frac{\varphi_1'^2}{4y_1^2} - \frac{\varphi_2' x_1}{y_1^2} \right] + \dots \right\} y_1 (Ax_1 - Cx_0) \\ &+ \left\{ -\frac{x_1}{y_1} + x_0 \frac{\varphi_1'}{2y_1} + x_0^2 \frac{\varphi_2'}{2y_1} + \dots \right\} \left\{ A(2x_1^2 - \alpha - x_0 \varphi_1 - x_0^2 \varphi_2 \dots) - (B+C)x_1 x_0 \right\} \\ &- y_1 \left\{ Ax_1 - Bx_0 \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par y_1 et remplaçons y_1 par son développement :

$$\begin{aligned} &\left\{ x_1^2 - x_0 x_1 \varphi_1' + x_0^2 \left[\frac{\varphi_1'^2}{4} - \varphi_2' x_1 \right] + \dots \right\} (Ax_1 - Cx_0) \\ &+ \left\{ -x_1 + x_0 \frac{\varphi_1'}{2} + x_0^2 \frac{\varphi_2'}{2} + \dots \right\} \left\{ A(2x_1^2 - \alpha - x_0 \varphi_1 - x_0^2 \varphi_2 \dots) - (B+C)x_1 x_0 \right\} \\ &- \left\{ \alpha - x_1^2 + x_0 \varphi_1 + x_0^2 \varphi_2 + \dots \right\} \left\{ Ax_1 - Bx_0 \right\} = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que le terme indépendant de x_0 est $\equiv 0$:

$$Ax_1^3 - 2Ax_1^3 + Ax_1^2 - Ax_1^2 + Ax_1^3 \equiv 0.$$

Cela doit être, puisque $y_1^2 = \alpha - x_1^2$ est solution de l'équation (1) débarrassée des termes en x_0 .

Une première approximation sera obtenue en écrivant que le coefficient de x_0 est identiquement nul, c'est-à-dire :

$$-Cx_1^2 - Ax_1^2 \varphi_1' + A\varphi_1 x_1 + Ax_1^2 \varphi_1' - Ax_1 \frac{\varphi_1'}{2} + (B+C)x_1^2 + Bx_1 - Bx_1^2 - Ax_1 \varphi_1 = 0,$$

ou, après réduction :

$$\frac{Ax_1 \varphi_1'}{2} = Bx_1,$$

d'où :

$$\varphi_1' = \frac{2B}{A}$$

et

$$\varphi_1 = K + \frac{2B}{A} x_1;$$

K est une constante qui dépend de α .

La première solution approximative est donc :

$$y_1^2 = \alpha + Kx_0 - x_1^2 + \frac{2B}{A} x_1 x_0.$$

Elle correspond à une famille de circonférences de centre $\xi = \frac{Bx_0}{A}$, $\eta = 0$.

On déterminera K en écrivant que par un point il passe une et une seule courbe intégrale. Par exemple, cherchons la courbe qui passe par $x_1 = \alpha$, $y_1 = 0$:

$$\alpha + Kx_0 - \alpha^2 + \frac{2B}{A} \alpha x_0 = 0,$$

d'où :

$$K = \frac{1}{x_0} \left[\alpha^2 - \alpha - \frac{2B}{A} \alpha x_0 \right],$$

et par suite :

$$y_1^2 + x_1^2 - \frac{2B}{A} x_0 x_1 - \alpha^2 + \frac{2B}{A} \alpha x_0 = 0.$$

On établit ainsi une correspondance courbe à courbe entre la famille initiale de courbes intégrales et la famille de première approximation.

Cette dernière est formée de circonférences concentriques dont le centre commun est $\xi = \frac{Bx_0}{A}$, $\eta = 0$ et le rayon $\left(\alpha - \frac{B}{A} x_0 \right)$. Géométriquement, la correspondance entre les courbes des deux familles est simple; il suffit de déplacer le centre de la circonférence de $\frac{B}{A} x_0$ suivant l'axe des Ox et de mener une nouvelle circonférence tangentielle à la première.

Une deuxième approximation sera obtenue en écrivant que le coefficient de x_0^2 est identiquement nul, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_1 \varphi_1' C + A x_1 \frac{\varphi_1'^2}{4} - A x_1^2 \varphi_1' + A \varphi_1 x_1 - (A \varphi_1 + B x_1 + C x_1) \frac{\varphi_1}{2} \\ + (2A x_1^2 - A \gamma) \frac{\varphi_1'}{2} + B \varphi_1 - A \varphi_1 x_1 = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de ce que

$$\varphi_1 = K + \frac{2B}{A} x_1,$$

$$\varphi_1' = \frac{2B}{A},$$

après réduction, il vient :

$$x_1 \frac{BC}{A} = \frac{A}{2} \alpha \varphi_2',$$

d'où :

$$\varphi_2' = 2 \frac{BC}{A^2 \alpha} x_1,$$

$$\varphi_2 = \frac{BC}{A^2 \alpha} x_1^2 + J;$$

J est une constante qui dépend de α .

La deuxième solution approximative est donc :

$$y_1^2 = -x_1^2 + \alpha^2 - \frac{2B}{A} \alpha x_0 + \frac{2B}{A} x_1 x_0 + x_0^2 \frac{BC}{A^2 \alpha} x_1^2 + x_0^2 J.$$

On déterminera J comme plus haut, en cherchant par exemple la courbe qui passe par $y_1 = 0$, $x_1 = \alpha$.

On a alors :

$$x_0^2 \alpha^2 \frac{BC}{A^2 \alpha} + x_0^2 J = 0,$$

d'où :

$$J = -\frac{BC}{A^2} \alpha$$

et finalement

$$y_1^2 = -x_1^2 + \alpha^2 - \frac{2B}{A} \alpha x_0 + \frac{2B}{A} x_1 x_0 + \frac{BC}{A^2 \alpha} x_0^2 x_1^2 - \frac{BC}{A^2} \alpha x_0^2$$

ou

$$y_1^2 + x_1^2 \left[1 - \frac{BC}{A^2 \alpha} x_0^2 \right] - \frac{2B}{A} x_0 x_1 - \left\{ \alpha^2 - \frac{2B}{A} \alpha x_0 - \frac{BC}{A^2} \alpha x_0^2 \right\} = 0.$$

En deuxième approximation, on obtient donc une famille d'ellipses dont l'un des axes coïncide avec Ox et l'autre est parallèle à Oy. Les coordonnées du centre de l'une de ces ellipses sont :

$$\xi = \frac{\frac{B}{A} x_0}{1 - \frac{BC}{A^2 \alpha} x_0^2}, \quad \eta = 0.$$

Le grand axe est parallèle à Ox , et le rapport entre les deux est :

$$\left[1 - \frac{BC}{A^2} \alpha_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On a en effet :

$$\text{partie principale de } B = \text{partie principale de } C = \frac{\mu_0^2(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1 R_1^2 z_0}.$$

Il en résulte que BC est positif.

Recherche de la deuxième famille.

L'hypothèse faite revient à admettre l'existence d'une solution de la forme :

$$y_1 = \beta x_1 + x_0 \psi_1 + x_0^2 \psi_2 + \dots,$$

$\psi_1, \psi_2, \dots$ étant des fonctions de x_1 et de β à déterminer.

D'où il suit :

$$y_1^2 = \beta^2 x_1^2 + 2\beta x_1 \psi_1 x_0 + (\psi_1^2 + 2\beta x_1 \psi_2) x_0^2 + \dots,$$

$$y_1' = \beta + x_0 \psi_1' + x_0^2 \psi_2' + \dots,$$

$$(y_1')^2 = \beta^2 + 2\beta \psi_1' x_0 + (\psi_1'^2 + 2\beta \psi_2') x_0^2 + \dots$$

En substituant dans (1), il vient :

$$\begin{aligned} & \left[\beta^2 + 2\beta \psi_1' x_0 + (\psi_1'^2 + 2\beta \psi_2') x_0^2 + \dots \right] \left[\beta x_1 + x_0 \psi_1 + x_0^2 \psi_2 + \dots \right] (Ax_1 - Cx_0) \\ & + \left[\beta + x_0 \psi_1' + x_0^2 \psi_2' + \dots \right] \left[A \left(x_1^2 - \beta^2 x_1^2 - 2\beta x_1 \psi_1 x_0 - (\psi_1^2 + 2\beta x_1 \psi_2) x_0^2 \dots \right) - (B+C) x_1 x_0 \right] \\ & - \left[\beta x_1 + x_0 \psi_1 + x_0^2 \psi_2 + \dots \right] (Ax_1 - Bx_0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Égalons, comme plus haut, à zéro les coefficients des différentes puissances de x_0 .

On vérifie d'abord que le terme indépendant de x_0 est $\equiv 0$, ce qui doit être, puisque $y_1 = \beta x_1$ est solution de l'équation (1) débarrassée des termes en x_0 :

$$A\beta^3 x_1^2 + A\beta x_1^2 - A\beta^3 x_1^2 - A\beta x_1^2 \equiv 0.$$

Une première approximation sera obtenue en égalant à zéro le coefficient de x_0 , c'est-à-dire :

$$\beta^2 \{ -C\beta x_1 + Ax_1\psi_1 \} + 2\beta^2\psi_1' Ax_1^2 + \beta \{ -2A\beta x_1\psi_1 - (B+C)x_1 \} \\ + \psi_1' \{ Ax_1^2 - A\beta^2 x_1^2 \} + B\beta x_1 - A\psi_1 x_1 = 0,$$

ou

$$\psi_1' \{ 2A\beta^2 x_1^2 + Ax_1^2 - A\beta^2 x_1^2 \} + \psi_1 \{ A\beta^2 x_1 - 2A\beta^2 x_1 - Ax_1 \} - C\beta^2 x_1 - B\beta x_1 - C\beta x_1 + B\beta x_1 = 0, \\ \psi_1' Ax_1^2 (1 + \beta^2) - \psi_1 Ax_1 (1 + \beta^2) - C\beta x_1 (1 + \beta^2) = 0,$$

et finalement :

$$\psi_1' x_1 - \psi_1 = \frac{C}{A} \beta.$$

La solution générale de cette équation est :

$$\psi_1 = Mx_1 - \frac{C}{A} \beta,$$

M étant une fonction de β .

Il vient pour la première solution approximative :

$$y_1 = \beta x_1 + Mx_0 x_1 - \frac{C}{A} \beta x_0.$$

On déterminera M comme plus haut, en écrivant, par exemple, que pour $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$ avec limite $\frac{x_1}{y_1} = \beta$, ce qui exige $M = 0$. D'où il suit :

$$y_1 = \beta \left(x_1 - \frac{C}{A} x_0 \right),$$

et la deuxième famille est constituée en première approximation par des droites concourantes passant par le point $\xi = \frac{C}{A} x_0$, $\eta = 0$. On peut remarquer qu'on obtient ces droites en faisant subir à celles du début la translation $\frac{C}{A} x_0$.

Une deuxième approximation sera obtenue en égalant à zéro le coefficient de x_0^2 :

$$\beta^2 \{ -C\psi_1 + A\psi_2 x_1 \} + 2\beta\psi_1' \{ -C\beta x_1 + A\psi_1 x_1 \} + (\psi_1'^2 + 2\beta\psi_2') A\beta x_1^2 \\ + \beta \{ -A(\psi_1^2 + 2\beta x_1\psi_2) \} + \psi_1' \{ -2A\beta x_1\psi_1 - (B+C)x_1 \} + \psi_2' \{ Ax_1^2 - A\beta^2 x_1^2 \} \\ + \psi_1 B - A\psi_2 x_1 = 0.$$

En tenant compte de la valeur trouvée pour ψ_1 , après réduction il vient :

$$-\beta \frac{BC}{A} - \psi_2 Ax_1 (1 + \beta^2) + \psi_2' Ax_1^2 (1 + \beta^2) = 0$$

ou

$$\psi_2' x_1 - \psi_2 = \frac{\beta}{1 + \beta^2} \frac{BC}{Ax_1}.$$

La solution générale de cette équation est :

$$\psi_s = Nx_i - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \frac{BC}{2A^2 x_i}.$$

La deuxième approximation est :

$$y_i = \beta x_i - \frac{C}{A} \beta x_0 + Nx_i x_0^2 - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \frac{BC}{2A^2} \frac{x_0^2}{x_i}$$

ou

$$x_i^2 \left\{ \beta + Nx_0^2 \right\} - x_i y_i - x_i \frac{C\beta x_0}{A} - x_0^2 \frac{BC}{2A^2} \frac{\beta}{1 + \beta^2} = 0.$$

On déterminera N par la condition $x_i = \infty$, $y = \infty$ avec limite $\frac{y_i}{x_i} = \beta$, c'est-à-dire que les directions asymptotiques des hyperboles trouvées seront les droites initiales.

Ces directions asymptotiques sont données par

$$x_i^2(\beta + Nx_0^2) - x_i y_i = 0$$

ou

$$\frac{y_i}{x_i} = \beta + Nx_0^2,$$

ce qui exige $N = 0$.

D'où finalement pour les courbes de la deuxième famille en seconde approximation :

$$\beta x_i^2 - x_i y_i - x_i \frac{C\beta x_0}{A} - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \frac{BC}{2A^2} x_0^2 = 0.$$

Elle est formée d'une série d'hyperboles qui admettent comme asymptotes la droite fixe $x = 0$ et une droite mobile passant par le point fixe $\xi = \frac{C}{A} x_0$, $\eta = 0$ et de coefficient angulaire β .

Pour $\beta = \infty$, le système se réduit aux deux droites $x = 0$, $x = \frac{C}{A} x_0$.

Les courbes obtenues sont les projections sur XOY de courbes situées sur S_1 . Dans les limites de notre approximation, on peut confondre les projections précédentes avec la perspective de ces courbes sur XOY par rapport à A_0 .

En effet, considérons A_i sur S_i , sa projection a_i sur XOY et sa perspective a_i' par rapport à A_0 . On a :

$$a_i a_i' = A_i a_i \times \operatorname{tg} \varphi.$$

Or $A_i a_i$ est du 2^e ordre; $\operatorname{tg} \varphi$ est également du 2^e ordre, puisque l'on a supposé $\frac{1}{z_0}$ du 1^{er} ordre.

D'où $a_i a_i'$ est du 4^e ordre et par suite négligeable.

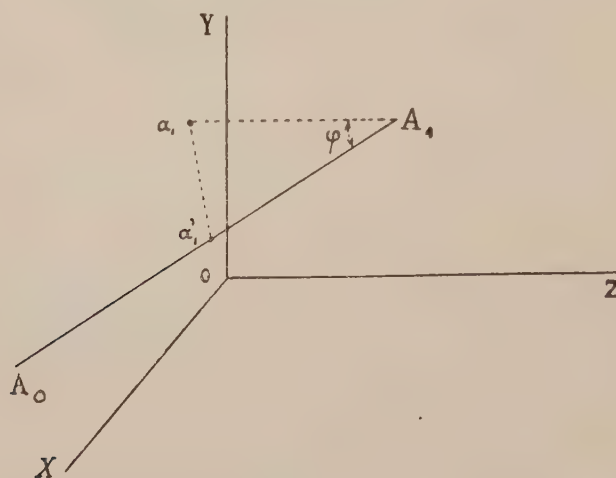


FIG. 8.

Avec l'approximation faite, on peut donc prendre les courbes obtenues comme diaphragmes, lorsque l'on se propose d'isoler les normales développables à la sortie du dioptré.

On a trouvé ainsi, en deuxième approximation, une famille d'ellipses et une famille d'hyperboles qui ne coupent point orthogonalement les premières. Cette conclusion semblerait donner raison à M. Finsterwalder, vu l'accord apparent entre son résultat et le théorème de Malus (page 19 du Mémoire cité plus haut). Mais il suffit de remarquer, que l'orthogonalité exigée par ce théorème, vise seulement les normales développables à la sortie du système, et non pas les surfaces de rayons qui leur correspondent à l'incidence. La réfraction ne transforme pas, en général, une surface développable en une autre également développable, et, par suite, deux surfaces de rayons qui donnent à l'émergence deux surfaces développables ne se coupent pas en général orthogonalement. Il en est de même de leur section par un plan perpendiculaire à l'axe du système.

On pourrait, en continuant la méthode de résolution, espérer un résultat plus précis. Cela serait illusoire, vu l'approximation avec laquelle a été établie l'équation qui nous sert de point de départ. C'est pourquoi nous nous bornerons à cette deuxième approximation.

CHAPITRE III.

Nous établirons d'abord, dans ce chapitre, l'équation de la caustique en utilisant les courbes de première approximation obtenues au chapitre précédent.

Recherche de la première nappe.

La directrice sur laquelle s'appuie une surface développable à l'émergence se projette sur le plan XOY suivant une courbe dont l'équation est :

$$y_1^2 + x_1^2 - \frac{2B}{A} x_1 x_0 + \frac{2B}{A} \alpha x_0 - \alpha^2 = 0.$$

Adoptons les coordonnées polaires avec OX comme axe et le centre commun des circonférences directrices comme pôle; on a :

$$x_1 = \rho \cos \theta + \frac{B}{A} x_0, \quad y_1 = \rho \sin \theta.$$

L'équation précédente se réduit alors à :

$$\rho = \alpha - \frac{B}{A} x_0.$$

Les équations optiques s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 = a\rho \cos \theta + \left(a\frac{B}{A} - b\right)x_0 + \left(P - \frac{2PR_1}{z_0}\right)\rho^2 \cos \theta + P\frac{B}{A}x_0\rho^2 + 2P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_1}{z_0}\right)x_0\rho^2 \cos^2 \theta \\ \quad \text{au 5° ordre près.} \\ \mathcal{M}_1 = a\rho \sin \theta + \left(P - \frac{2PR_1}{z_0}\right)\rho^2 \sin \theta + P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_1}{z_0}\right)x_0\rho^2 \sin 2\theta \\ \quad \text{au 5° ordre près.} \\ \mathcal{N}_1 = \mu_1 - \frac{a^2}{2\mu_1}\rho^2 - \left(a\frac{B}{A} - b\right)\frac{a}{\mu_1}x_0\rho \cos \theta. \quad \text{au 4° ordre près,} \end{array} \right.$$

Les équations d'un rayon émergent sont :

$$\begin{cases} X = x_i + \lambda \mathcal{L}_i, \\ Y = y_i + \lambda \mathcal{M}_i, \\ Z = z_i + \lambda \mathcal{N}_i. \end{cases}$$

Si l'on fait dans ces équations $\rho = c^{\text{te}}$, on obtient une développable de la première famille. Les équations de ces développables sont de la forme :

$$\begin{cases} X = f_1(\theta) + \lambda \varphi_1(\theta), \\ Y = f_2(\theta) + \lambda \varphi_2(\theta), \\ Z = f_3(\theta) + \lambda \varphi_3(\theta). \end{cases}$$

L'arête de rebroussement de chacune de ces développables, c'est-à-dire une géodésique de la caustique, sera obtenue en cherchant une fonction $\lambda = \psi(\theta)$ satisfaisant à :

$$\frac{dX}{\mathcal{L}_i} = \frac{dY}{\mathcal{M}_i}$$

ou

$$\frac{dx_i + \lambda d\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_i} = \frac{dy_i + \lambda d\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_i},$$

$$\frac{\frac{\partial x_i}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \theta}}{\mathcal{L}_i} = \frac{\frac{\partial y_i}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \theta}}{\mathcal{M}_i}.$$

On a, d'autre part :

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta, \\ \frac{\partial y_i}{\partial \theta} = \rho \cos \theta; \\ \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \theta} = -a\rho \sin \theta - \left(P - \frac{2PR_i}{z_0}\right)\rho^3 \sin \theta - 2P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_i}{z_0}\right)x_0\rho^3 \sin 2\theta, \\ \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \theta} = a\rho \cos \theta + \left(P - \frac{2PR_i}{z_0}\right)\rho^3 \cos \theta + 2P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_i}{z_0}\right)x_0\rho^3 \cos 2\theta \quad \text{au 5° ordre près.} \end{cases}$$

La condition précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \left[-\rho \sin \theta - \lambda a\rho \sin \theta - \lambda \left(P - 2\frac{PR_i}{z_0}\right)\rho^3 \sin \theta \right. \\ & \left. - 2\lambda P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_i}{z_0}\right)x_0\rho^3 \sin 2\theta \right] \left[a\rho \sin \theta + \left(P - \frac{2PR_i}{z_0}\right)\rho^3 \sin \theta + P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_i}{z_0}\right)x_0\rho^3 \sin 2\theta \right] \\ & - \left[\rho \cos \theta + \lambda a\rho \cos \theta + \lambda \left(P - \frac{2PR_i}{z_0}\right)\rho^3 \cos \theta + 2\lambda P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_i}{z_0}\right)x_0\rho^3 \cos 2\theta \right] \left[a\rho \cos \theta \right. \\ & \left. + \left(a\frac{B}{A} - b\right)x_0 + \left(P - \frac{2PR_i}{z_0}\right)\rho^3 \cos \theta + P\frac{B}{A}x_0\rho^3 + 2P\left(\frac{B}{A} + \frac{R_i}{z_0}\right)x_0\rho^3 \cos^2 \theta \right] = 0. \end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

λ_0 étant fini,

ε_1 une grandeur du 1^{er} ordre,

ε_2 — 2^e ordre,

ε_3 — 3^e ordre.

Les termes des différents ordres du développement précédent doivent être identiquement nuls.

Le terme du 2^e ordre devient, après réduction :

$$-a\rho^2(1 + \lambda_0 a),$$

ce qui exige :

$$\lambda_0 = -\frac{1}{a}.$$

Le terme du 3^e ordre est :

$$-\varepsilon_1 a^2 \rho^3 - (1 + \lambda_0 a) \left(a \frac{B}{A} - b \right) x_0 \rho \cos \theta.$$

Étant donné la valeur précédente de λ_0 , il faut $\varepsilon_1 = 0$.

Le terme du 4^e ordre devient, si l'on tient compte de $\lambda_0 = -\frac{1}{a}$, $\varepsilon_1 = 0$,

$$-[\varepsilon_2 a^3 \rho^3 - P\rho^4];$$

d'où :

$$\varepsilon_2 = \frac{P}{a^3} \rho^3.$$

Le terme du 5^e ordre est :

$$2P \left(\frac{B}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho^3 \cos \theta - \frac{2PR_1}{z_0} \rho^4 - \varepsilon_3 a^2 \rho^5,$$

ce qui donne :

$$\varepsilon_3 = -\frac{2PR_1}{a^2 z_0} \rho^3 + \frac{2P}{a^2} \left(\frac{B}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho \cos \theta.$$

En résumé, l'on a :

$$\lambda = -\frac{1}{a} + \frac{P}{a^3} \rho^3 - \frac{2PR_1}{a^2 z_0} \rho^3 + \frac{2P}{a^2} \left(\frac{B}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho \cos \theta.$$

Les équations de la première nappe de caustique sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{b}{a} x_0 - \frac{Pbx_0\rho^3}{a^3} \quad \text{au 5° ordre près.} \\ Y = 0 \quad \text{au 5° ordre près.} \\ Z = -\frac{\mu_1}{a} + \left[\frac{1}{2R_1} + \frac{a}{2\mu_1} + \frac{P\mu_1}{a^3} \right] \rho^3 \quad (2^\circ \text{ ordre}) \\ \quad + \left[\frac{B}{AR_1} + \frac{aB}{\mu_1 A} - \frac{b}{\mu_1} + \frac{2P\mu_1}{a^3} \left(\frac{B}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) \right] x_0 \rho \cos \theta - \frac{2PR_1\mu_1}{a^3 z_0} \rho^3 \quad \text{au 4° ordre près.} \end{array} \right.$$

3^e ordre

Dans la dernière équation, il suffit de retenir pour le coefficient de $x_0 \rho \cos \theta$ les termes du 1^{er} ordre. On vérifie facilement que la somme de ces éléments est nulle. On voit ainsi que la première nappe de caustique se réduit à une *droite située dans le plan ZOX*. Ses équations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{b}{a} x_0 - \frac{Pbx_0}{a^3} \rho^3, \\ Y = 0, \\ Z = -\frac{\mu_1}{a} + \left[\frac{1}{2R_1} + \frac{a}{2\mu_1} + \frac{P\mu_1}{a^3} - \frac{2PR_1\mu_1}{a^3 z_0} \right] \rho^3. \end{array} \right.$$

On peut encore écrire la dernière équation :

$$Z = -\frac{\mu_1}{a} + \left[2P\mu_1 + a^2 \left(\frac{a}{\mu_1} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{4PR_1\mu_1}{z_0} \right] \frac{\rho^3}{2a^3},$$

ou

$$Z = -\frac{\mu_1}{a} + \frac{A\rho^3}{2a^3}.$$

La valeur principale de A est :

$$\frac{\mu_0^2(\mu_0 - \mu_1)}{\mu_1 R_1^3}.$$

Dans le cas ordinaire, $\mu_1 > \mu_0$; par suite, $A < 0$ et $a < 0$. Z admet un maximum $-\frac{\mu_1}{a}$ qui correspond à $\rho^3 = 0$. L'abscisse correspondante est $X = \frac{b}{a} x_0$.

Les coordonnées de l'extrémité de la droite caustique sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} x_0, \\ 0, \\ -\frac{\mu_1}{a}. \end{array} \right.$$

La directrice qui fournit ce point se projette sur le plan XOY, suivant une circonférence qui se réduit au point $y_1 = 0$, $x_1 = \frac{B}{A} x_0$.

L'équation de la droite caustique devient, en éliminant ρ^3 :

$$\rho^3 = \left(Z + \frac{\mu_1}{a} \right) \frac{2a^3}{A},$$

$$\lambda = \frac{bx_0}{a} \left[1 - \frac{2Pa}{A} \left(Z + \frac{\mu_1}{a} \right) \right]$$

ou

$$\lambda = \frac{bx_0}{a} \left[1 - \frac{2P\mu_1}{A} \right] - 2bx_0 \frac{PZ}{A},$$

$$X = \frac{bx_0}{a} \left[\frac{a^3 \left(\frac{1}{R} + \frac{a}{\mu_1} \right)}{A} \right] - 2bx_0 \frac{PZ}{A},$$

$$X = \frac{C}{A} x_0 - \frac{2Pbx_0}{A} Z,$$

ce qui nous montre que cette droite passe par le point de coordonnées

$$Z = 0, \quad X = \frac{C}{A} x_0,$$

c'est-à-dire par le point de concours des droites qui sont les projections des directrices de la deuxième famille de développable.

L'extrémité de la droite caustique est située dans le plan image de Gauss conjugué du plan objet $z = z_0$. En effet, la cote z' de ce plan est fournie par la relation

$$\mu_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{z_0} \right) = \mu_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{z'} \right),$$

$$\frac{\mu_1}{z'} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{R_1} + \frac{\mu_0}{z_0} = -a,$$

$$z' = -\frac{\mu_1}{a},$$

ce qui est précisément la cote de l'extrémité de la droite caustique.

Les équations d'un rayon émergent sont :

$$\begin{cases} X = x_1 + \lambda \ell_1, \\ Y = y_1 + \lambda \ell_2, \\ Z = z_1 + \lambda \ell_3. \end{cases}$$

En faisant dans ces équations $\theta = c^e$, on obtiendra une développable de la deuxième famille. Les équations de ces développables sont de la forme :

$$\begin{cases} X = f_1(\rho) + \lambda \varphi_1(\rho), \\ Y = f_2(\rho) + \lambda \varphi_2(\rho), \\ Z = f_3(\rho) + \lambda \varphi_3(\rho). \end{cases}$$

L'arête de rebroussement de chacune d'elle, c'est-à-dire une géodésique de la caustique, sera obtenue en cherchant une fonction $\lambda = \psi(\rho)$ satisfaisant à :

$$\frac{dY}{\ell_2} = \frac{dZ}{\ell_3}$$

ou

$$\frac{\frac{\partial y_1}{\partial \rho} + \lambda \frac{\partial \ell_2}{\partial \rho}}{\ell_2} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial \rho} + \lambda \frac{\partial \ell_3}{\partial \rho}}{\ell_3}.$$

On a, d'autre part :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial \rho} = \sin \theta, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \rho} = \frac{\rho}{R_1} + \frac{C}{AR_1} x_0 \cos \theta, \\ \frac{\partial \ell_2}{\partial \rho} = a \sin \theta + 3 \left(P - \frac{2PR_1}{z_0} \right) \rho^2 \sin \theta + 2P \left(\frac{C}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho \sin 2\theta, \\ \frac{\partial \ell_3}{\partial \rho} = -\frac{a^2}{\mu} \rho - \left(a \frac{C}{A} - b \right) \frac{a}{\mu_1} x_0 \cos \theta. \end{cases}$$

La condition précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \left[\mu_1 - \frac{a^2}{2\mu_1} \rho^2 - \left(a \frac{C}{A} - b \right) \frac{a}{\mu_1} x_0 \rho \cos \theta \right] \sin \theta \\ & - \left[a \rho \sin \theta + \left(P - \frac{2PR_1}{z_0} \right) \rho^2 \sin \theta + P \left(\frac{C}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho^2 \sin 2\theta \right] \left[\frac{\rho}{R_1} + \frac{C}{AR_1} x_0 \cos \theta \right] \\ & + \lambda \left[a \sin \theta + 3P \rho^2 \sin \theta - \frac{6PR_1}{z_0} \rho^2 \sin \theta + 2P \left(\frac{C}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho \sin 2\theta \right] \left[\mu_1 - \frac{a^2}{2\mu_1} \rho^2 - \left(a \frac{C}{A} - b \right) \frac{a}{\mu_1} x_0 \rho \cos \theta \right] \\ & + \lambda \left[\frac{a^2}{\mu_1} \rho + \left(a \frac{C}{A} - b \right) \frac{a}{\mu_1} x_0 \cos \theta \right] \left[a \rho \sin \theta + P \rho^2 \sin \theta - \frac{2PR_1}{z_0} \rho^2 \sin \theta + P \left(\frac{C}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho^2 \sin 2\theta \right] = 0. \end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

λ_0 étant fini,

ε_1 grandeur du 1^{er} ordre,

ε_2 — 2^e ordre.

ε_3 — 3^e ordre.

Les termes des différents ordres du développement précédent doivent être identiquement nuls.

Le terme fini est :

$$\mu_1(1 + \lambda_0 a) \sin \theta,$$

d'où

$$\lambda_0 = -\frac{1}{a}.$$

Le terme du 1^{er} ordre est :

$$\varepsilon_1 \mu_1 a \sin \theta, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_1 = 0.$$

Le terme du 2^e ordre est :

$$\left[\varepsilon_2 a \mu_1 - \frac{3P\mu_1 + a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right)}{a} \rho^2 \right] \sin \theta,$$

d'où

$$\varepsilon_2 = \frac{3P\mu_1 + a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right)}{a^2 \mu_1} \rho^2$$

ou

$$\varepsilon_2 = \frac{A + P\mu_1}{a^2 \mu_1} \rho^2 = \frac{P}{a^2} \left(1 + \frac{A}{P\mu_1} \right) \rho^2.$$

Le terme du 3^e ordre est :

$$\left\{ \varepsilon_3 + \frac{6PR_1}{a^2 z_0} \rho^2 - \left[\frac{4P}{a^2} \left(\frac{C}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) x_0 \rho + \frac{C}{\mu_1 A R_1} x_0 \rho + \frac{Ca}{A \mu_1^2} x_0 \rho - \frac{b}{\mu_1^2} x_0 \rho \right] \cos \theta \right\} a \mu_1 \sin \theta,$$

d'où

$$\varepsilon_3 = \left[\frac{4P}{a^2} \left(\frac{C}{A} + \frac{R_1}{z_0} \right) + \frac{C}{\mu_1 A} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right) - \frac{b}{\mu_1^2} \right] x_0 \rho \cos \theta - \frac{6PR_1}{a^2 z_0} \rho^2$$

ou

$$\varepsilon_3 = \left[2P \left(\frac{R_1}{z_0} + \frac{C}{A} \right) - \frac{B - C}{\mu_1} \right] \frac{x_0 \rho \cos \theta}{a^2} - \frac{6PR_1}{a^2 z_0} \rho^2.$$

Comme l'élément du 1^{er} ordre du terme entre crochets est nul, il vient :

$$\epsilon_3 = -\frac{6PR_1}{a^2 z_0} \rho^2.$$

Finalement,

$$\lambda = -\frac{1}{a} + \frac{P}{a^2} \left(1 + \frac{A}{P\mu_1}\right) \rho^2 - \frac{6PR_1}{a^2 z_0} \rho^3.$$

Les équations de la deuxième nappe de caustique deviennent après réduction :

$$\begin{cases} X = \frac{b}{a} x_0 + \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0}\right) \rho^3 \cos \theta - \frac{3Pb}{a^2} x_0 \rho^2 & \text{au 5^e ordre près.} \\ Y = \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0}\right) \rho^3 \sin \theta & \text{au 5^e ordre près.} \\ Z = -\frac{\mu_1}{a} + \frac{3A}{2a^2} \rho^2 & \text{au 4^e ordre près.} \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} Z_1 = Z + \frac{\mu_1}{a}, \\ X_1 = X - \frac{b}{a} x_0, \end{cases}$$

ce qui revient à prendre pour nouveau plan XOY le plan image de Gauss, et pour origine l'image de Gauss, on a :

$$\begin{cases} X_1 = \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0}\right) \rho^3 \cos \theta - \frac{3Pb}{a^2} x_0 \rho^2, \\ Y = \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0}\right) \rho^3 \sin \theta, \\ Z_1 = \frac{3A}{2a^2} \rho^2. \end{cases}$$

Cette surface est de révolution autour de Δ . La méridienne située dans le plan XOZ est :

$$\begin{cases} X = \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0}\right) \rho^3 - \frac{3Pb}{a^2} x_0 \rho^2, \\ Z_1 = \frac{3A}{2a^2} \rho^2. \end{cases}$$

Il est en effet légitime, dans les limites de notre approximation, de confondre les sections normales à Oz avec les sections perpendiculaires à la droite caustique Δ .

Adoptons comme nouveaux axes de coordonnées la droite Δ et une direction perpendiculaire. Ces axes font, avec les précédents, l'angle $-\frac{x_0}{z_0}$.

Appelons X' et Z' les nouvelles coordonnées, l'équation de la méridienne s'écrit :

$$\begin{cases} X' = \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0} \right) \rho^3 - \left[\frac{A}{2} - P\mu_0 \right] \frac{3x_0\rho^2}{a^2z_0} & \text{au 5° ordre près,} \\ Z' = \frac{3A}{2A^2} \rho^3 & \text{au 4° ordre près;} \end{cases}$$

ou encore, puisque la partie finie de $\frac{A}{2} - P\mu_0$ est nulle :

$$\begin{cases} X' = \left(\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0} \right) \rho^3 & \text{au 5° ordre près.} \\ Z' = \frac{3A}{2a^2} \rho^3 & \text{au 4° ordre près.} \end{cases}$$

C'est une parabole semi-cubique dont l'équation peut encore s'écrire :

$$\left[\frac{X'}{\frac{A}{a\mu_1} - \frac{4PR_1}{az_0}} \right]^2 = \left(\frac{2a^2}{3A} Z' \right)^3.$$

On obtient ainsi, comme deuxième nappe de caustique, une *surface de révolution*, dont la méridienne est une parabole semi-cubique et l'axe de révolution la droite Δ .

Le premier fait se déduit d'ailleurs de la théorie générale des congruences de normales. En effet, la congruence des rayons réfractés est une congruence de normales rencontrant la droite Δ . Il en résulte que cette congruence est nécessairement de révolution autour de Δ et que la deuxième famille de développables est formée des plans passant par Δ et par les droites :

$$y_1 = \beta \left(x_1 - \frac{C}{A} x_0 \right).$$

La deuxième nappe de caustique est donc nécessairement de révolution autour de Δ .

Identité entre les résultats obtenus et ceux que l'on peut prévoir a priori.

Les résultats obtenus pouvaient être prévus *a priori*. On sait, en effet⁽¹⁾, qu'à un point P_0 de l'axe d'un système centré quelconque, correspond une caustique dont l'une des nappes est une portion de l'axe et l'autre une surface de révolution engen-

(1) A. KÖNIG et M. VON ROHR, *Die theorie der optischen instrumente*, Bd. I, ch. v.

La partie principale de OT_1 est donc :

$$-\frac{R_1 x_0}{z_0} \quad (2^{\text{e}} \text{ ordre}).$$

De même on a :

$$OT = \frac{C}{A} x_0.$$

La partie principale de C est :

$$\frac{\mu_0^2(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1 R_1^2 z_0} \quad (1^{\text{er}} \text{ ordre}).$$

La partie principale de A est :

$$-\frac{\mu_0^2(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1 R_1^3} \quad (\text{fini}).$$

La partie principale de $\frac{C}{A}$ est donc :

$$-\frac{R_1}{z_0} \quad (1^{\text{er}} \text{ ordre}).$$

Par suite, la partie principale de OT est $-\frac{R_1 x_0}{z_0}$.

On voit ainsi, qu'au 3^e ordre près, T_1 coïncide avec T . Donc, dans les limites des approximations faites, la droite Δ se confond avec l'axe de révolution P_0C du système.

En fait, le point J où se raccordent les deux nappes de caustique ne doit pas être situé dans le plan image de Gauss, mais en J_1 , sur la sphère décrite de C tangentiellement au plan image de Gauss. Mais ceci est conforme à nos conclusions, puisque, dans les limites des approximations faites, J_1 et J_2 coïncident. On a en effet :

$$J_1 J_2 = \frac{\left(\frac{b}{a} x_0\right)^2}{2R} \quad \text{grandeur du 4^e ordre.}$$

En résumé, la méthode de calcul adoptée nous donne avec le cas simple un résultat correct, ce qui la légitime en quelque sorte *a posteriori*.

Recherche directe de la caustique.

On peut obtenir les équations de la caustique sans passer par l'intermédiaire de l'équation (1). Les rayons réfractés sont représentés par :

$$\begin{cases} X = x_i + \lambda \mathcal{L}_i, \\ Y = y_i + \lambda \mathcal{M}_i, \\ Z = z_i + \lambda \mathcal{N}_i. \end{cases}$$

Les valeurs de λ correspondant aux points focaux satisfont aux équations :

$$\begin{cases} dx_i + \lambda d\mathcal{L}_i - R\mathcal{L}_i = 0, \\ dy_i + \lambda d\mathcal{M}_i - R\mathcal{M}_i = 0, \\ dz_i + \lambda d\mathcal{N}_i - R\mathcal{N}_i = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que ce sont les solutions de :

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_i} & \lambda \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial y_i} & \mathcal{L}_i \\ \lambda \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial x_i} & 1 + \lambda \frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial y_i} & \mathcal{M}_i \\ p + \lambda \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial x_i} & q + \lambda \frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial y_i} & \mathcal{N}_i \end{vmatrix} = 0$$

avec

$$p = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y_i}.$$

Si l'on tient compte des équations optiques et si l'on pose :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

λ_0 étant fini et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des grandeurs du premier, deuxième et troisième ordre, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{array}{l}
1 + \lambda_0 a + \frac{a}{z_0} P(3x_1^2 + y_1^2) + \frac{a}{z_0} P(4x_0x_1 - 6x_1^2 - 2y_1^2) + \varepsilon_1(3Px_1^2 + Py_1^2) \\
\quad + \varepsilon_2 a \\
\frac{\lambda_0 2Px_1y_1}{z_0} \\
\frac{PR_1}{z_0} (2x_0y_1 - 4x_1y_1) + \varepsilon_1 2Px_1y_1 \\
\quad + \lambda_0 \frac{PR_1}{z_0} (2x_0x_1 - 2x_1^2 + 6y_1^2 - 2x_1x_0) \\
\quad + a\varepsilon_2 + \varepsilon_1(Px_1^2 + 3Py_1^2) \\
\quad + \varepsilon_3 a \\
\frac{ax_1}{z_0} - bx_0 \\
\frac{x_1}{R_1} - \frac{a^2x_1}{\mu_1} \lambda_0 + \frac{abx_0}{\mu_1} \varepsilon_1 - \frac{a^2x_1}{\mu_1} \varepsilon_1 - 4\lambda_0 \frac{a}{\mu_1} \left(P + \frac{a^3}{8\mu_1^2} \right) x_1(x_1^2 + y_1^2) \\
\quad + \frac{abx_0}{\mu_1} \varepsilon_1 \\
\quad - \frac{a^2x_1}{\mu_1} \varepsilon_2 + \frac{(x_1^2 + y_1^2)x_1}{2R_1^3} \\
\frac{y_1}{R_1} - \frac{a^2y_1}{\mu_1} \lambda_0 - \frac{a^2y_1}{\mu_1} \varepsilon_1 - 4\lambda_0 \frac{a}{\mu_1} \left(P + \frac{a^3}{8\mu_1^2} \right) y_1(x_1^2 + y_1^2) \\
\quad - \frac{a^2y_1}{\mu_1} \varepsilon_2 + \frac{(x_1^2 + y_1^2)y_1}{2R_1^3} \\
\mu_1 \\
\frac{a^2}{2\mu_1} (x_1^2 + y_1^2) \\
\end{array}$$

= 0.

Le nombre de traits représente l'ordre d'un élément. Nous verrons que les termes écrits permettent de pousser le développement de ce déterminant jusqu'au 5^e ordre, sans omission.

Le seul terme fini est :

$$\mu_1(1 + \lambda_0 a)^2 \quad \text{ce qui fournit} \quad \lambda_0 = -\frac{1}{a}.$$

On peut donc obtenir les termes du 3^e ordre dans le développement, sans introduire les éléments de cet ordre qui figurent dans les équations optiques, éléments qui se placeraient dans la dernière colonne du tableau.

Le terme du 1^{er} ordre est identiquement nul.

Le terme du 2^e ordre est $\mu_1(a\varepsilon_1)^2$, ce qui exige $\varepsilon_1 = 0$.

Le terme du 3^e ordre est identiquement nul.

On pourra pousser le développement jusqu'au terme de 5^e ordre, sans craindre une omission, car les termes négligés dans les équations optiques n'introduiraient que des éléments d'ordre supérieur à 5, puisque $\varepsilon_1 = 0$.

Le terme du 4^e ordre donne :

$$x_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right) \begin{vmatrix} -\frac{2P}{a} x_1 y_1 & ax_1 \\ -\frac{P}{a} (3y_1^2 + x_1^2) + a\varepsilon_2 & ay_1 \end{vmatrix} \\ + y_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right) \begin{vmatrix} \frac{P}{a} (3x_1^2 + y_1^2) - a\varepsilon_2 & ax_1 \\ \frac{2P}{a} x_1 y_1 & ay_1 \end{vmatrix} + \mu_1 \begin{vmatrix} -\frac{P}{a} (3x_1^2 + y_1^2) + a\varepsilon_2 & -\frac{2P}{a} x_1 y_1 \\ -\frac{2P}{a} x_1 y_1 & -\frac{P}{a} (3y_1^2 + x_1^2) + a\varepsilon_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right) [P(x_1^2 + y_1^2) - a^2 \varepsilon_2] (x_1^2 + y_1^2) + \mu_1 \left[\frac{3P^2}{a^2} (x_1^2 + y_1^2)^2 - 4P\varepsilon_2 (x_1^2 + y_1^2) + a^2 \varepsilon_2^2 \right] = 0.$$

En posant :

$$\varepsilon_2 = \theta (x_1^2 + y_1^2),$$

il vient :

$$\mu_1 a^2 \theta^2 - \left[4P\mu_1 + a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right) \right] \theta + \frac{P}{a^2} \left[3P\mu_1 + a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{a}{\mu_1} \right) \right] = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} \mu_1 a^2 \theta^2 - (A + 2P\mu_1) \theta + \frac{P}{a^2} (A + P\mu_1) &= 0, \\ \mu_1 a^2 \left[\theta^2 - \frac{P\mu_1}{\mu_1 a^2} \theta - \frac{A + P\mu_1}{\mu_1 a^2} \theta - \frac{P}{a^2} \frac{A + P\mu_1}{\mu_1 a^2} \right] &= 0, \\ \mu_1 a^2 \left[\theta \left(\theta - \frac{P}{a^2} \right) - \frac{A + P\mu_1}{\mu_1 a^2} \left(\theta - \frac{P}{a^2} \right) \right] &= 0, \\ \mu_1 a^2 \left(\theta - \frac{P}{a^2} \right) \left(\theta - \frac{P}{a^2} \left[1 + \frac{A}{P\mu_1} \right] \right) &= 0; \end{aligned}$$

d'où, pour ε_2 , les deux valeurs :

$$\begin{cases} \frac{P}{a^2} (x_1^2 + y_1^2), \\ \frac{P}{a^2} \left(1 + \frac{A}{P\mu_1} \right) (x_1^2 + y_1^2). \end{cases}$$

Le terme du 5^e ordre devient après réduction :

$$\begin{aligned} & \mu_1 \left[-12 \frac{P^2 R_1}{a^2 z_0} (x_1^2 + y_1^2)^2 - 4P \varepsilon_3 (x_1^2 + y_1^2) + 2a^2 \varepsilon_3 \varepsilon_3 + \frac{8PR_1}{z_0} \varepsilon_3 (x_1^2 + y_1^2) + \frac{10P^2 R_1}{a^2 z_0} x_1 x_0 (x_1^2 + y_1^2) - \frac{6PR_1}{z_0} \varepsilon_3 x_1 x_0 \right] \\ & + \left(\frac{1}{R} + \frac{a}{\mu_1} \right) \left[-\frac{2PR_1}{z_0} (x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2 \varepsilon_3 (x_1^2 + y_1^2) + 2 \frac{PR_1}{z_0} x_1 x_0 (x_1^2 + y_1^2) - \frac{Pb}{a} x_1 x_0 (x_1^2 + y_1^2) + ab \varepsilon_3 x_1 x_0 \right] \\ & - \frac{Pb}{\mu_1} x_1 x_0 (x_1^2 + y_1^2) + \frac{a^2 b}{\mu_1} \varepsilon_3 x_1 x_0. \end{aligned}$$

En écrivant que ce terme est identiquement nul, et en remplaçant ε_3 par chacune des valeurs trouvées plus haut, on obtient pour ε_3 les deux valeurs :

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} -\frac{2PR_1}{a^2 z_0} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{2PR_1}{a^2 z_0} x_1 x_0, \\ -\frac{6PR_1}{a^2 z_0} (x_1^2 + y_1^2) + \left(\frac{2PR_1}{z_0} - \frac{B+C}{\mu_1} \right) \frac{x_1 x_0}{a^2}. \end{cases}$$

D'où finalement :

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{1}{a} + \frac{P}{a^2} (x_1^2 + y_1^2) - \frac{2PR_1}{a^2 z_0} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{2PR_1}{a^2 z_0} x_1 x_0, \\ -\frac{1}{a} + \frac{P}{a^2} \left(1 + \frac{A}{P\mu_1} \right) (x_1^2 + y_1^2) - \frac{6PR_1}{a^2 z_0} (x_1^2 + y_1^2) + \left(\frac{2PR_1}{z_0} - \frac{B+C}{\mu_1} \right) \frac{x_1 x_0}{a^2}. \end{cases}$$

Si l'on fait, dans la première valeur trouvée pour λ , le changement de variables défini par :

$$x = \rho \cos \theta + \frac{B}{A} x_0, \quad y = \rho \sin \theta,$$

et, dans la deuxième, le changement défini par :

$$x = \rho \cos \theta + \frac{C}{A} x_0, \quad y = \rho \sin \theta,$$

on retrouve pour λ les deux expressions précédemment obtenues.

En remplaçant, dans les équations du rayon émergent, λ par les valeurs ainsi déterminées, on trouve les équations de la caustique.

Il y a lieu de remarquer ici que nous parvenons à des résultats identiques par deux voies différentes. Cet accord légitime *a posteriori* la méthode adoptée pour résoudre l'équation (1). Ceci est important, car si l'on connaît bien les approximations faites pour établir cette équation, on ignore *a priori* l'ordre des incertitudes qui entacheront la solution.

Si nous nous bornions à la recherche des équations de la caustique, il suffirait d'adopter la deuxième méthode de calcul. Mais nous nous proposons, en premier

lieu, la recherche des diaphragmes à employer pour ne laisser passer à travers un système optique centré que les rayons formant dans l'espace image une surface développable, c'est-à-dire les rayons qui s'appuieront dans cet espace sur les lignes de courbure d'une surface d'onde quelconque. La résolution d'un semblable problème me paraît avoir un grand *intérêt physique*; c'est l'emploi de semblables diaphragmes qui constitue la méthode la plus rationnelle pour étudier expérimentalement la formation des caustiques. Si l'on veut, en effet, déterminer par expérience l'élément de caustique qui correspond à une partie élémentaire quelconque de la surface frontale du système, on doit isoler un pinceau dont les dimensions sont petites, mais qui sont nécessairement finies. Or, parmi tous les pinceaux possibles, le groupement correspondant à un élément des courbes diaphragmes est celui qui se rapproche le plus du groupement théorique dans lequel tous les rayons vont passer par un point. Ce groupement donne, en effet, un élément linéaire de la caustique, alors que tout autre en donnerait un élément superficiel.

D'autre part, les éléments de caustique ainsi déterminés sont les éléments des géodésiques de ces surfaces. De ces éléments on peut déduire facilement leurs trajectoires orthogonales qui sont les courbes suivant lesquelles les surfaces d'onde se replient sur elles-mêmes. Ce sont ces dernières courbes qui interviennent lorsqu'on considère la partie non géométrique du problème, comme l'a fait M. Macé de Lépinay. Il y a donc intérêt encore à ce point de vue à réaliser expérimentalement les géodésiques de la caustique, puisqu'elles s'introduisent naturellement quand on aborde la partie ondulatoire du sujet.

CHAPITRE IV.

Cas de deux dioptries sphériques (lentille).

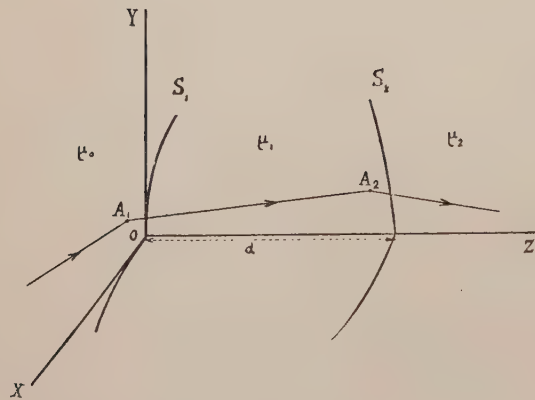


FIG. 11.

On prend comme axe Oz, la droite qui joint les centres des deux dioptries. Les rayons sont R_1 et R_2 avec la même convention de signe qu'au chapitre II.

x_2, y_2, z_2 sont les coordonnées du point A_2 , où le rayon réfracté une première fois en A_1 vient subir une deuxième réfraction.

d est l'épaisseur de la lentille.

Avec la même approximation que précédemment, l'équation de S_2 est

$$z_2 = d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^3}.$$

Équations géométriques donnant les coordonnées de A_2 .

Les équations du rayon réfracté A_1A_2 s'écrivent :

$$\frac{X - x_1}{l_1} = \frac{Y - y_1}{m_1} = \frac{Z - z_1}{n_1} = R,$$

d'où

$$Z = Rn_1 + z_1.$$

Pour le point Λ_2 , on a :

$$z_2 = Rn_2 + z_1 = d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^3},$$

d'où

$$R = \frac{1}{n_2} \left\{ d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^3} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^3} \right\}.$$

Dans les limites de notre approximation :

$$n_2 = \sqrt{1 - (l_1^2 + m_1^2)} = 1 - \frac{l_1^2 + m_1^2}{2} - \frac{1}{8}(l_1^2 + m_1^2)^2,$$

$$\frac{1}{n_2} = 1 + \frac{l_1^2 + m_1^2}{2} + \frac{3}{8}(l_1^2 + m_1^2)^2$$

et

$$R = d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} + \frac{l_1^2 + m_1^2}{2}d \text{ au 4° ordre près.}$$

Par suite,

$$x_2 = Rl_2 + x_1 = x_1 + l_1d + \frac{l_1}{2R_2}(x_2^2 + y_2^2) - \frac{l_1}{2R_1}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{l_1}{2}(l_1^2 + m_1^2)d$$

au 5° ordre près.

On peut prendre ici

$$x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + d^2(l_1^2 + m_1^2) + 2d(l_1x_1 + m_1y_1),$$

d'où il vient :

$$x_2 = x_1 + l_1d + \frac{(x_1^2 + y_1^2)l_1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{(l_1^2 + m_1^2)l_1d^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) + \frac{d}{R_2}l_1(l_1x_1 + m_1y_1)$$

et de même :

$$y_2 = y_1 + m_1d + \frac{(x_1^2 + y_1^2)m_1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{(l_1^2 + m_1^2)m_1d^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) + \frac{d}{R_2}m_1(l_1x_1 + m_1y_1)$$

au 5° ordre près

ou encore :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + l_1 \frac{d}{\mu_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\mu_1} \mathcal{L}_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{M}_1^2)\mathcal{L}_1d^2}{2\mu_1^3} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) + \frac{d}{R_2\mu_1^2} \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1x_1 + \mathcal{M}_1y_1), \\ y_2 = y_1 + m_1 \frac{d}{\mu_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\mu_1} \mathcal{M}_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{M}_1^2)\mathcal{M}_1d^2}{2\mu_1^3} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) + \frac{d}{R_2\mu_1^2} \mathcal{M}_1(\mathcal{L}_1x_1 + \mathcal{M}_1y_1). \end{cases}$$

Posons :

$$\frac{d}{\mu_1} = \delta, \quad \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = c_1, \quad \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) = e_1, \quad \frac{1}{R_2\mu_1^2} = f_1.$$

Les équations précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} x_s = x_i + \mathfrak{L}_i \delta + (x_i^2 + y_i^2) \mathfrak{L}_i c_s + (\mathfrak{L}_i^2 + \mathfrak{M}_i^2) \mathfrak{L}_i \delta^2 e_s + \delta f_s \mathfrak{L}_i (\mathfrak{L}_i x_i + \mathfrak{M}_i y_i), \\ y_s = y_i + \mathfrak{M}_i \delta + (x_i^2 + y_i^2) \mathfrak{M}_i c_s + (\mathfrak{L}_i^2 + \mathfrak{M}_i^2) \mathfrak{M}_i \delta^2 e_s + \delta f_s \mathfrak{M}_i (\mathfrak{L}_i x_i + \mathfrak{M}_i y_i). \end{cases}$$

En tenant compte des valeurs trouvées pour $\mathfrak{L}_i$ et $\mathfrak{M}_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_s = & x_i(1 + a\delta) - b\delta x_0 + x_i(x_i^2 + y_i^2)(P\delta + ac_s + a^3\delta^2 e_s + a^3\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta) \\ & - x_i^2 x_0(bc_s + 3a^3b\delta^2 e_s + 2ab\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta) \\ & - y_i^2 x_0(bc_s + a^3b\delta^2 e_s + ab\delta f_s) \\ & - x_i y_i y_0(2a^3b\delta^2 e_s + ab\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta), \\ y_s = & y_i(1 + a\delta) - b\delta y_0 + y_i(x_i^2 + y_i^2)(P\delta + ac_s + a^3\delta^2 e_s + a^3\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta) \\ & - y_i^2 y_0(bc_s + 3a^3b\delta^2 e_s + 2ab\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta) \\ & - x_i^2 y_0(bc_s + a^3b\delta^2 e_s + ab\delta f_s) \\ & - x_i y_i x_0(2a^3b\delta^2 e_s + ab\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta) \text{ au } 5^{\text{e}} \text{ ordre près.} \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} a_i &= P\delta + ac_s + a^3\delta^2 e_s + a^3\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0} \quad (\text{fini}), \\ a_s &= bc_s + 3a^3b\delta^2 e_s + 2ab\delta f_s - \frac{2PR_i}{z_0}\delta \quad (1^{\text{er}} \text{ ordre}), \\ a_3 &= bc_s + a^3b\delta^2 e_s + ab\delta f_s \quad (1^{\text{er}} \text{ ordre}). \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{array}{cccc} \text{1er ordre} & \text{2e ordre} & \text{3e ordre} & \text{4e ordre} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ x_s = & x_i(1 + a\delta) - b\delta x_0 + a_i x_i(x_i^2 + y_i^2) - a_s x_0 x_i^2 \\ & & & - a_3 x_0 y_i^2 \\ & & & - (a_s - a_3) y_0 x_i y_i, \\ y_s = & y_i(1 + a\delta) - b\delta y_0 + a_i y_i(x_i^2 + y_i^2) - a_s y_0 y_i^2 \\ & & & - a_3 y_0 x_i^2 \\ & & & - (a_s - a_3) x_0 x_i y_i. \end{array}$$

Dans le cas particulier où $y_0 = 0$, les équations précédentes se simplifient et deviennent :

$$\begin{cases} x_s = x_i(1 + a\delta) - b\delta x_0 + a_i x_i(x_i^2 + y_i^2) - x_0(a_s x_i^2 + a_3 y_i^2), \\ y_s = y_i(1 + a\delta) + a_i y_i(x_i^2 + y_i^2) - (a_s - a_3) x_0 x_i y_i. \end{cases}$$

Équations optiques en A_2 .

L_2, M_2, N_2 sont les cosinus directeurs de la normale en A_2 .

l_2, m_2, n_2 désignent les cosinus directeurs du rayon qui a subi une deuxième réfraction en A_2 .

μ_2 étant l'indice du dernier milieu, $\mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2$ représentent les quantités $\mu_2 l_2, \mu_2 m_2, \mu_2 n_2$.

On peut écrire, comme au chapitre II,

$$\frac{x_2 - x_1}{L_2} = \frac{y_2 - y_1}{M_2} = \frac{z_2 - z_1}{N_2} = \mathcal{H}_2$$

avec

$$L_2 = -\frac{x_2}{R_2}, \quad M_2 = -\frac{y_2}{R_2}, \quad N_2 = 1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2^2} - \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^4},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \mathcal{H}_2 L_2 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{M}_2 &= \mathcal{H}_2 M_2 + \mathcal{M}_1, \\ \mathcal{N}_2 &= \mathcal{H}_2 N_2 + \mathcal{N}_1. \end{aligned}$$

En procédant comme plus haut, on trouverait :

$$\mathcal{H}_2 = \mu_2 - \mu_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} (\mu_2 - \mu_1) \varphi_2$$

avec

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{x_2 l_1}{R_2}}_{2^e \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{y_2 m_1}{R_2}}_{2^e \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2^2}}_{2^e \text{ ordre}} + \underbrace{\frac{l_1^2 + m_1^2}{2}}_{2^e \text{ ordre}} + \text{grandeur du } 4^e \text{ ordre}.$$

Si l'on veut obtenir les équations optiques en A_2 au 5° ordre près, il suffit de déterminer $\mathcal{H}_2$ au 4° ordre près. Il suffira donc d'utiliser pour φ_2 l'expression écrite ci-dessus. On pourra, dans cette expression, prendre

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \mathcal{L}_1 \delta, \\ y_2 = y_1 + \mathcal{M}_1 \delta, \end{cases}$$

car les termes oubliés introduiraient des grandeurs qui seraient au moins du 4° ordre.

Alors :

$$\varphi_2 = \frac{\mathcal{L}_1(x_1 + \mathcal{L}_1\delta)}{\mu_1 R_2} + \frac{\mathbb{B}_1(y_1 + \mathbb{B}_1\delta)}{\mu_1 R_2} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2^2} + \frac{\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{B}_1^2}{2R_2^2} \delta^2 + \frac{\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{B}_1 y_1}{R_2^2} \delta + \frac{\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{B}_1^2}{2\mu_1^2} \text{ au } 4^{\text{e}} \text{ ordre près.}$$

ou

$$\varphi_2 = \frac{\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{B}_1 y_1}{\mu_1 R_2} \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) + \frac{\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{B}_1^2}{2\mu_1^2} \left(1 + \frac{d}{R_2}\right)^2 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2^2}.$$

Cela donne, en négligeant les grandeurs à partir du 5^e ordre :

$$\mathcal{L}_2 = -(\mu_2 - \mu_1) \frac{x_2}{R_2} - \varphi_2 \mu_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \frac{x_2}{R_2} + \mathcal{L}_1$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} x_1 + \mathcal{L}_1 \left(1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} \delta\right) - x_1(x_1^2 + y_1^2) \mu_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 R_2} \frac{1}{2R_2^2} \\ & - \mathcal{L}_1(x_1^2 + y_1^2) \left\{ c_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} + \mu_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 R_2} \frac{\delta}{2R_2^2} \right\} \\ & - (\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{B}_1 y_1) x_1 \left\{ \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 R_2^2} \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \right\} \\ & - (\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{B}_1 y_1) \mathcal{L}_1 \left\{ \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} \delta f_2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 R_2^2} \delta \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \right\} \\ & - (\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{B}_1^2) x_1 \left\{ \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1 \mu_2 R_2} \left(1 + \frac{d}{R_2}\right)^2 \right\} \\ & - (\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{B}_1^2) \mathcal{L}_1 \left\{ \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} \delta^2 e_2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1 \mu_2 R_2} \delta \left(1 + \frac{d}{R_2}\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

au 5^e ordre près.

$$\mathbb{B}_2 = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} y_1 + \mathbb{B}_1 \left(1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} \delta\right) - \text{une expression déduite de la précédente en permutant } \mathcal{L}_1 \text{ et } x_1 \text{ avec } \mathbb{B}_1 \text{ et } y_1.$$

En posant :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2}, & 2\beta_2 &= \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{d}{\mu_2 R_2^2}, & \gamma_2 &= \frac{d}{\mu_2 R_2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{\mu_1 R_2} + \frac{d}{\mu_2 R_2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_2} \right), & \theta_2 &= \frac{d^2}{2\mu_1 \mu_2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_2} \right)^2, \end{aligned}$$

les expressions précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = & \alpha_2 x_1 + (1 + \alpha_2 \delta) \mathcal{L}_1 + x_1(x_1^2 + y_1^2) \frac{\mu_1}{2\mu_2 R_2^2} \alpha_2 + (\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{M}_1 y_1) \mathcal{L}_1 \varepsilon_2 \gamma_2 \delta \\ & + (\mathcal{L}_1(x_1^2 + y_1^2) \alpha_2 \beta_2 + (\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{M}_1^2) x_1 \alpha_2 \theta_2 \\ & + (\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{M}_1 y_1) x_1 \alpha_2 \gamma_2 + (\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{M}_1^2) \mathcal{L}_1 \{ \delta e_2 + \theta_2 \} \alpha_2 \delta \\ & \text{au 5° ordre près.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_2 = & \alpha_2 y_1 + (1 + \alpha_2 \delta) \mathbb{M}_1 + y_1(x_1^2 + y_1^2) \frac{\mu_1}{2\mu_2 R_2^2} \alpha_2 + (\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{M}_1 y_1) \mathbb{M}_1 \varepsilon_2 \alpha_2 \delta \\ & + \mathbb{M}_1(x_1^2 + y_1^2) \alpha_2 \beta_2 + (\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{M}_1^2) y_1 \alpha_2 \theta_2 \\ & + (\mathcal{L}_1 x_1 + \mathbb{M}_1 y_1) y_1 \alpha_2 \gamma_2 + (\mathcal{L}_1^2 + \mathbb{M}_1^2) \mathbb{M}_1 \{ \delta e_2 + \theta_2 \} \alpha_2 \delta \\ & \text{au 5° ordre près.}\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant $\mathcal{L}_1$ et $\mathbb{M}_1$ par les valeurs obtenues dans les équations optiques écrites au chapitre II.

On arrive à :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = & x_1 [a(1 + \alpha_2 \delta) + \alpha_2] - b x_0 (1 + \alpha_2 \delta) \\ & + x_1(x_1^2 + y_1^2) [P(1 + \alpha_2 \delta) + \frac{\mu_1 \alpha_2}{2\mu_2 R_2^2} + a \alpha_2 \beta_2 + a \alpha_2 \gamma_2 + a^2 \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + a^2 \alpha_2 \theta_2 + a^2 (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta - \frac{2PR_1}{z_0} (1 + \alpha_2 \delta)] \\ & - x_1^2 x_0 [b \alpha_2 \beta_2 + b \alpha_2 \gamma_2 + 2ab \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + 2ab \alpha_2 \theta_2 + 3a^2 b (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta - \frac{2PR_1}{z_0} (1 + \alpha_2 \delta)] \\ & - y_1^2 x_0 [b \alpha_2 \beta_2 + ab \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + a^2 b (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta] \\ & - x_1 y_1 y_0 [b \alpha_2 \gamma_2 + ab \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + 2ab \alpha_2 \theta_2 + 2a^2 b (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta - \frac{2PR_1}{z_0} (1 + \alpha_2 \delta)],\end{aligned}$$

$\mathbb{M}_2 =$ Expression analogue obtenue en permutant x_1 et x_0 avec y_1 et y_0 .

En posant :

$$(\text{fini}) \quad A = a(1 + \alpha_2 \delta) + \alpha_2,$$

$$(\text{1° ordre}) \quad B = b(1 + \alpha_2 \delta),$$

$$(\text{fini}) \quad B_1 = P(1 + \alpha_2 \delta) + \frac{\mu_1 \alpha_2}{2\mu_2 R_2^2} + a \alpha_2 \beta_2 + a \alpha_2 \gamma_2 + a^2 \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + a^2 \alpha_2 \theta_2 + a^2 (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta - \frac{2PR_1}{z_0} (1 + \alpha_2 \delta),$$

$$(\text{1° ordre}) \quad B_2 = b \alpha_2 \beta_2 + b \alpha_2 \gamma_2 + 2ab \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + 2ab \alpha_2 \theta_2 + 3a^2 b (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta - \frac{2PR_1}{z_0} (1 + \alpha_2 \delta),$$

$$(\text{1° ordre}) \quad B_3 = b \alpha_2 \beta_2 + ab \varepsilon_2 \alpha_2 \delta + a^2 b (\delta e_2 + \theta_2) \alpha_2 \delta,$$

on obtient les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccc} \text{1er ordre} & \text{2e ordre} & \text{3e ordre} & \text{4e ordre} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_2 = Ax_1 - Bx_0 + B_1x_1(x_1^2 + y_1^2) - B_2x_0x_1^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - B_3x_0y_1^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - (B_2 - B_3)y_0x_1y_1, \\ \mathcal{M}_2 = Ay_1 - By_0 + B_1y_1(x_1^2 + y_1^2) - B_2y_0y_1^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - B_3y_0x_1^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - (B_2 - B_3)x_0x_1y_1, \\ \mathcal{N}_2 = \mu_2 - \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2\mu_2} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8\mu_2^3}, \end{array} \end{array} \right.$$

ou, en tenant compte des valeurs précédentes,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 = \mu_2 - A^2 \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\mu_2} + \frac{AB(x_1x_0 + y_1y_0)}{\mu_2} - \frac{B^2(x_0^2 + y_0^2)}{2\mu_2} \\ - A^4 \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8\mu_2^3} \\ - AB_1 \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Ces équations sont obtenues au 5° ordre près.

*Condition à satisfaire pour qu'une normale de rayons émergents soit développable.
Courbes directrices du faisceau incident.*

Les équations d'un rayon émergent sont :

$$\frac{X - x_2}{\mathcal{Q}_2} = \frac{Y - y_2}{\mathcal{M}_2} = \frac{Z - z_2}{\mathcal{N}_2}.$$

Les coordonnées x_1, y_1 d'une courbe située sur S_1 , telle que le pinceau issu de A_0 et s'appuyant sur cette courbe forme après la deuxième réfraction une surface développable, doivent satisfaire à la condition :

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ \mathcal{Q}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ d\mathcal{Q}_1 & d\mathcal{M}_1 & d\mathcal{N}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les éléments de ce déterminant sont, pour la première ligne :

$$\begin{aligned} dx_2 &= \left\{ (1 + a\partial) + a_1(x_1^2 + y_1^2) + 2a_1x_1^2 - 2a_1x_0x_1 - (a_2 - a_3)y_0y_1 \right\} dx_1 \\ &+ \left\{ 2a_1x_1y_1 - 2a_3x_0y_1 - (a_2 - a_3)y_0x_1 \right\} dy_1, \\ dy_2 &= \left\{ 2a_1x_1y_1 - 2a_3y_0x_1 - (a_2 - a_3)x_0y_1 \right\} dx_1 \\ &+ \left\{ (1 + a\partial) + a_1(x_1^2 + y_1^2) + 2a_1y_1^2 - 2a_3y_0y_1 - (a_2 - a_3)x_0x_1 \right\} dy_1. \end{aligned}$$

De la relation :

$$z_2 = d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^3}$$

ou

$$\begin{aligned} z_2 &= d + \frac{1}{2R_2} \left\{ (1 + a\partial)^2(x_1^2 + y_1^2) + (b\partial)^2(x_0^2 + y_0^2) - 2(1 + a\partial)b\partial(x_1x_0 + y_1y_0) + 2a_1(1 + a\partial)(x_1^2 + y_1^2) \right\} \\ &+ \frac{1}{8R_2^3} (1 + a\partial)^4(x_1^2 + y_1^2)^2, \end{aligned}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} dz_2 &= \left\{ \frac{1}{R_2} \left[(1 + a\partial)^2x_1 - (1 + a\partial)b\partial x_0 + 4a_1(1 + a\partial)x_1(x_1^2 + y_1^2) \right] + \frac{1}{2R_2^3} (1 + a\partial)^4x_1(x_1^2 + y_1^2) \right\} dx_1 \\ &+ \left\{ \frac{1}{R_2} \left[(1 + a\partial)^2y_1 - (1 + a\partial)b\partial y_0 + 4a_1(1 + a\partial)y_1(x_1^2 + y_1^2) \right] + \frac{1}{2R_2^3} (1 + a\partial)^4y_1(x_1^2 + y_1^2) \right\} dy_1. \end{aligned}$$

Nous prendrons comme éléments de la deuxième ligne les équations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 = Ax_1 - Bx_0 + B_1x_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \mathcal{M}_2 = Ay_1 - By_0 + B_1y_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \mathcal{N}_2 = \mu_2 - \Lambda^2 \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\mu_2} + \frac{AB(x_1x_0 + y_1y_0)}{\mu_2}. \end{cases}$$

Les éléments de la troisième ligne sont :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_2 &= \left\{ A + B_1(x_1^2 + y_1^2) + 2B_1x_1^2 - 2B_3x_0x_1 - (B_2 - B_3)y_0y_1 \right\} dx_1 \\ &+ \left\{ 2B_1x_1y_1 - 2B_3x_0y_1 - (B_2 - B_3)y_0x_1 \right\} dy_1, \\ d\mathcal{M}_2 &= \left\{ 2B_1x_1y_1 - 2B_3y_0x_1 - (B_2 - B_3)x_0y_1 \right\} dx_1 \\ &+ \left\{ A + B_1(x_1^2 + y_1^2) + 2B_1y_1^2 - 2B_3y_0y_1 - (B_2 - B_3)x_0x_1 \right\} dy_1, \\ d\mathcal{N}_2 &= \left\{ -\frac{\Lambda^2x_1}{\mu_2} + \frac{AB}{\mu_2}x_0 - \frac{\Lambda^4}{2\mu_2^3}(x_1^2 + y_1^2)x_1 - \frac{4AB_1}{\mu_2}(x_1^2 + y_1^2)x_1 \right\} dx_1 \\ &+ \left\{ -\frac{\Lambda^2y_1}{\mu_2} + \frac{AB}{\mu_2}y_0 - \frac{\Lambda^4}{2\mu_2^3}(x_1^2 + y_1^2)y_1 - \frac{4AB_1}{\mu_2}(x_1^2 + y_1^2)y_1 \right\} dy_1. \end{aligned}$$

Tous ces éléments sont écrits au 4^e ordre près.

Développons le déterminant en ne retenant, comme au chapitre II, que les termes de 3^e ordre. On trouve :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \left[A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_1 - B_1(1+a\delta) \right\} \right] x_1 y_1 \\ & - \left[AB(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_2 - B_2(1+a\delta) \right\} \right] x_0 y_1 \\ & - \left[A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{B}{\mu_2} + \frac{b\delta}{R_2} \right\} - \mu_2 \left\{ A(a_2 - a_1) - (B_2 - B_1)(1+a\delta) \right\} \right] x_1 y_0, \end{aligned} \right\} \\
 & + dy_1 dx_1 \left\{ \begin{aligned} & \left[A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_1 - B_1(1+a\delta) \right\} \right] (x_1^2 - y_1^2) \\ & - \left[A(1+a\delta) \left\{ \frac{2AB}{\mu_2} + \frac{AB\delta}{R_2} + \frac{B(1+a\delta)}{R_2} \right\} - \mu_2 \left\{ A(a_2 + a_1) - (B_2 + B_1)(1+a\delta) \right\} \right] (x_1 x_0 - y_1 y_0), \end{aligned} \right\} \\
 & - dx_1^2 \left\{ \begin{aligned} & \left[A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_1 - B_1(1+a\delta) \right\} \right] x_1 y_1 \\ & - \left[AB(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_2 - B_2(1+a\delta) \right\} \right] x_1 y_0 \\ & - \left[A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{B}{\mu_2} + \frac{b\delta}{R_2} \right\} - \mu_2 \left\{ A(a_2 - a_1) - (B_2 - B_1)(1+a\delta) \right\} \right] x_0 y_1, \end{aligned} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

En posant :

$$(\text{fini}) \quad \mathcal{A} = A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_1 - B_1(1+a\delta) \right\},$$

$$(1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad \mathcal{B} = A^2(1+a\delta) \left\{ \frac{B}{\mu_2} + \frac{b\delta}{R_2} \right\} - \mu_2 \left\{ A(a_2 - a_1) - (B_2 - B_1)(1+a\delta) \right\},$$

$$(1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad \mathcal{C} = AB(1+a\delta) \left\{ \frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right\} - 2\mu_2 \left\{ Aa_2 - B_2(1+a\delta) \right\}.$$

L'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & dy_1^2 \left\{ \mathcal{A} x_1 y_1 - \mathcal{C} x_0 y_1 - \mathcal{B} x_1 y_0 \right\} \\
 & + dy_1 dx_1 \left\{ \mathcal{A} (x_1^2 - y_1^2) - (\mathcal{B} + \mathcal{C}) (x_1 x_0 - y_1 y_0) \right\} \\
 & - dx_1^2 \left\{ \mathcal{A} x_1 y_1 - \mathcal{C} x_1 y_0 - \mathcal{B} x_0 y_1 \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Comme dans le cas d'un dioptré, on vérifie facilement que $(\mathcal{B} - \mathcal{C})$ est du 2^e ordre.

Si l'on considère x_1 comme variable indépendante et si l'on fait $y_0 = 0$, ce qui ne particularise point la question, puisque cela revient à prendre comme plan ZOX le plan passant par A_0 , on obtient :

$$(4) \quad \left\| y_1'^2 y_1 (\mathcal{A} x_1 - \mathcal{C} x_0) + y_1' \left\{ \mathcal{A} (x_1^2 - y_1^2) - (\mathcal{B} + \mathcal{C}) x_1 x_0 \right\} - y_1 (\mathcal{A} x_1 - \mathcal{B} x_0) \right\| = 0.$$

On arrive ainsi à une équation identique à l'équation (1) obtenue au chapitre II. Les courbes de S_1 qui satisfont à la condition posée au début du paragraphe forment donc deux familles.

Une première famille comprend des courbes formées dont les projections sur XOY ont pour équation :

$$y_1^2 + x_1^2 - 2 \frac{B}{A} x_0 x_1 - x^2 + 2 \frac{B}{A} x x_0 = 0$$

en première approximation (*famille de circonférences concentriques*)

et

$$y_1^2 + x_1^2 \left(1 - \frac{BC}{A^2 x} \right) - 2 \frac{B}{A} x_0 x_1 - \left(x^2 - 2 \frac{B}{A} x x_0 - \frac{BC}{A^2} x x_0^2 \right) = 0$$

en deuxième approximation (*famille d'ellipses*).

Une deuxième famille est formée de courbes ouvertes dont les projections sur XOY ont pour équation :

$$y_1 = \beta \left(x_1 - \frac{C}{A} x_0 \right)$$

en première approximation (*famille de droites concourantes*)

et

$$\beta x_1^2 - x_1 y_1 - x_1 \frac{C}{A} \beta x_0 - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \frac{BC}{2A^2} x_0^2 = 0$$

en deuxième approximation (*familles d'hyperboles*).

Les remarques faites au chapitre II s'appliquent ici.

Les courbes obtenues en deuxième approximation ne sont point les coniques homofocales de M. Finsterwalder. D'autre part, comme au chapitre II et pour les mêmes raisons, on peut confondre les projections obtenues avec la perspective des courbes qui leur correspondent sur XOY par rapport à A_0 . De telle sorte qu'on peut prendre comme diaphragmes les courbes obtenues, lorsqu'on se propose d'isoler les normales développables à la sortie de la lentille.

Nous allons maintenant rechercher l'équation de la caustique *en utilisant seulement les directrices obtenues en première approximation*.

ÉTUDE DE LA CAUSTIQUE.

Recherche de la première nappe.

L'équation de la projection de la directrice à l'incidence est :

$$y_1^2 + x_1^2 - 2 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} x_0 x_1 = \alpha^2 - 2 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \alpha x_0.$$

Si l'on adopte les coordonnées polaires avec Ox comme axe et le centre commun des circonférences directrices comme pôle, on a :

$$x_1 = \rho \cos \theta + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} x_0,$$

$$y_1 = \rho \sin \theta.$$

L'équation précédente se réduit à :

$$\rho = \alpha - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} x_0.$$

Les équations géométriques qui donnent x_2, y_2, z_2 s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_0 \left[(1 + a\delta) \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - b\delta + \left(a_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - a_3 \right) \rho^2 \right] + [\rho(1 + a\delta) + a_1 \rho^3] \cos \theta + \left[2a_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - (a_2 - a_3) \right] x_0 \rho^2 \cos^2 \theta \\ \quad \text{au 5° ordre près,} \\ y_2 = \quad \quad \quad + [\rho(1 + a\delta) + a_1 \rho^3] \sin \theta + \left[a_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - \frac{a_2 - a_3}{2} \right] x_0 \rho^2 \sin 2\theta \\ \quad \text{au 5° ordre près,} \\ z_2 = d + \frac{\rho(1 + a\delta)}{2R_2} \left\{ \rho(1 + a\delta) + 2x_0 \cos \theta \left[(1 + a\delta) \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - b\delta \right] \right\} \\ \quad \text{au 4° ordre près.} \end{array} \right.$$

Les équations optiques deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_2 = \left[A \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - B + \left(B_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - B_3 \right) \rho^2 \right] x_0 + (A\rho + B_1 \rho^3) \cos \theta + \left[2B_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - (B_2 - B_3) \right] x_0 \rho^2 \cos^2 \theta \\ \quad \text{au 5° ordre près,} \\ \mathcal{M}_2 = (A\rho + B_1 \rho^3) \sin \theta + \left[B_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - \frac{B_2 - B_3}{2} \right] \rho^2 x_0 \sin 2\theta \\ \quad \text{au 5° ordre près,} \\ \mathcal{N}_2 = \mu_2 - \frac{A^2 \rho^2}{2\mu_2} - \left(A \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - B \right) \frac{A}{\mu_2} \rho x_0 \cos \theta \\ \quad \text{au 4° ordre près.} \end{array} \right.$$

En posant :

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - \frac{B_2 - B_3}{2} &= S & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), & & a_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - \frac{a_2 - a_3}{2} &= T & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), \\ A \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - B &= U & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), & & B_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - B_3 &= V & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), \\ (1 + a\delta) \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - b\delta &= W & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), & & a_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - a_3 &= Q & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{cases} x_2 = (W + Q\delta^2)x_0 + [\delta(1 + a\delta) + a_1\delta^3] \cos \theta + 2Tx_0\delta^2 \cos^2 \theta & \text{au } 5^{\circ} \text{ ordre près,} \\ y_2 = [\delta(1 + a\delta) + a_1\delta^3] \sin \theta + Tx_0\delta^2 \sin 2\theta & \text{au } 5^{\circ} \text{ ordre près,} \\ z_2 = d + \frac{\rho(1 + a\delta)}{2R_3} [\delta(1 + a\delta) + 2Wx_0 \cos \theta] & \text{au } 4^{\circ} \text{ ordre près;} \\ \mathcal{L}_2 = (U + V\delta^2)x_0 + (A\delta + B_1\delta^3) \cos \theta + 2Sx_0\delta^2 \cos^2 \theta & \text{au } 5^{\circ} \text{ ordre près,} \\ \mathcal{M}_2 = (A\delta + B_1\delta^3) \sin \theta + Sx_0\delta^2 \sin 2\theta & \text{au } 5^{\circ} \text{ ordre près,} \\ \mathcal{N}_2 = \mu_2 - \frac{A^2\delta^2}{2\mu_2} - \frac{AU\delta x_0}{\mu_2} \cos \theta & \text{au } 4^{\circ} \text{ ordre près.} \end{cases}$$

Les équations d'un rayon émergent sont :

$$\begin{cases} X = \lambda \mathcal{L}_2 + x_2, \\ Y = \lambda \mathcal{M}_2 + y_2, \\ Z = \lambda \mathcal{N}_2 + z_2. \end{cases}$$

Si l'on fait dans ces équations $\rho = c^2$, on obtient une développable de la première famille. Les équations de ces développables sont de la forme :

$$\begin{cases} X = f_1(\theta) + \lambda \varphi_1(\theta), \\ Y = f_2(\theta) + \lambda \varphi_2(\theta), \\ Z = f_3(\theta) + \lambda \varphi_3(\theta), \end{cases}$$

On obtiendra l'arête de rebroussement de chaque développable, c'est-à-dire une géodésique de la caustique, en cherchant une fonction $\lambda = \psi(\theta)$ satisfaisant à

$$\frac{dX}{\mathcal{L}_2} = \frac{dY}{\mathcal{M}_2}$$

ou

$$\frac{dx_2 + \lambda d\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_2} = \frac{dy_2 + \lambda d\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_2},$$

ou

$$\frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \theta} = \frac{\partial y_2}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \theta}.$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = - [\rho(1 + a\delta) + a_1\rho^3] \sin \theta - 2Tx_0\rho^3 \sin 2\theta, \\ \frac{\partial y_2}{\partial \theta} = [\rho(1 + a\delta) + a_1\rho^3] \cos \theta + 2Tx_0\rho^3 \cos 2\theta, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \theta} = - \frac{\rho(1 + a\delta)W}{R_2} x_0 \sin \theta; \\ \frac{\partial u_2}{\partial \theta} = - [A\rho + B_1\rho^3] \sin \theta - 2S\rho^3 x_0 \sin 2\theta, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \theta} = [A\rho + B_1\rho^3] \cos \theta + 2Sx_0\rho^3 \cos 2\theta, \\ \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = \frac{AU}{\mu_2} x_0 \rho \sin \theta. \end{cases}$$

La condition précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left\{ (A\rho + B_1\rho^3) \sin \theta + Sx_0\rho^3 \sin 2\theta \right\} \left\{ [\rho(1 + a\delta) + a_1\rho^3] \sin \theta + 2Tx_0\rho^3 \sin 2\theta \right\} \\ + & \left\{ (U + V\rho^3)x_0 + (A\rho + B_1\rho^3) \cos \theta + 2Sx_0\rho^3 \cos 2\theta \right\} \left\{ [\rho(1 + a\delta) + a_1\rho^3] \cos \theta + 2Tx_0\rho^3 \cos 2\theta \right\} \\ + & \lambda \left\{ (A\rho + B_1\rho^3) \sin \theta + Sx_0\rho^3 \sin 2\theta \right\} \left\{ [A\rho + B_1\rho^3] \sin \theta + 2S\rho^3 x_0 \sin 2\theta \right\} \\ + & \lambda \left\{ (U + V\rho^3)x_0 + (A\rho + B_1\rho^3) \cos \theta + 2Sx_0\rho^3 \cos 2\theta \right\} \left\{ (A\rho + B_1\rho^3) \cos \theta + 2Sx_0\rho^3 \cos 2\theta \right\} = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

λ_0 étant fini, ε_1 du 1^{er} ordre, ε_2 du 2^e ordre, ε_3 du 3^e ordre.

Écrivons que les termes des différents ordres du développement précédent sont indistinctement nuls.

Le terme du 2^e ordre est :

$$A\rho^3[(1 + a\delta) + A\lambda_0],$$

ce qui exige

$$\lambda_0 = - \frac{(1 + a\delta)}{A}.$$

Le terme du 3^e ordre est, en tenant compte de la valeur trouvée pour λ_0 :

$$\varepsilon_1 A^3 \rho^3, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_1 = 0.$$

Le terme du 4^e ordre devient après réduction :

$$[Aa_1\rho^3 - B_1(1 + a\delta)\rho^3 + \Lambda^3\varepsilon_3]\rho^3,$$

d'où :

$$\varepsilon_3 = \frac{B_1(1 + a\delta) - Aa_1}{\Lambda^3} \rho^3.$$

Le terme du 5^e ordre est :

$$\varepsilon_3\Lambda^3\rho^3 + 2[AT - S(1 + a\delta)]x_0\rho^3\cos\theta,$$

d'où :

$$\varepsilon_3 = 2 \frac{S(1 + a\delta) - AT}{\Lambda^2} x_0\rho\cos\theta.$$

On a par suite pour l'équation de la première nappe de caustique :

$$\begin{aligned} X = & (W + Q\rho^2)x_0 + [\rho(1 + a\delta) + a_1\rho^3]\cos\theta + 2Tx_0\rho^2\cos^2\theta \\ & - \frac{1 + a\delta}{\Lambda}(U + V\rho^2)x_0 - \frac{1 + a\delta}{\Lambda}(A\rho + B_1\rho^3)\cos\theta - \frac{1 + a\delta}{\Lambda}2Sx_0\rho^3\cos^2\theta \\ & + [B_1(1 + a\delta) - Aa_1]\frac{U}{\Lambda^2}x_0\rho^3 + [B_1(1 + a\delta) - Aa_1]\frac{\rho^3\cos\theta}{\Lambda} \\ & + 2[S(1 + a\delta) - AT]\frac{x_0\rho^2}{\Lambda}\cos^2\theta \end{aligned} \quad \text{au 5^e ordre près,}$$

$$\begin{aligned} Y = & [\rho(1 + a\delta) + a_1\rho^3]\sin\theta + Tx_0\rho^3\sin 2\theta \\ & - \frac{1 + a\delta}{\Lambda}(A\rho + B_1\rho^3)\sin\theta - \frac{1 + a\delta}{\Lambda}Sx_0\rho^3\sin 2\theta \\ & + [B_1(1 + a\delta) - Aa_1]\frac{\rho^3\sin\theta}{\Lambda} \\ & + 2[S(1 + a\delta) - AT]\frac{x_0\rho^2}{\Lambda}\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \quad \text{au 5^e ordre près,}$$

$$\begin{aligned} Z = & d + \frac{\rho(1 + a\delta)}{2R_2}[\rho(1 + a\delta) + 2Wx_0\cos\theta] \\ & - \frac{1 + a\delta}{\Lambda}\mu_2 + \frac{1 + a\delta}{2\mu_2}\Lambda\rho^2 + \frac{1 + a\delta}{\mu_2}Ux_0\rho\cos\theta \\ & + [B_1(1 + a\delta) - Aa_1]\frac{\mu_2}{\Lambda^2}\rho^2 \\ & + 2[S(1 + a\delta) - AT]\frac{\mu_2}{\Lambda^2}x_0\rho\cos\theta \end{aligned} \quad \text{au 4^e ordre près.}$$

Après réduction, ces équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \left[W - U \frac{1 + a\delta}{A} \right] x_0 + \left\{ \frac{B_3}{A} (1 + a\delta) - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\delta}{A} \right) \right\} x_0 \rho^2 \\ Y = 0 \quad \text{au 5° ordre près,} \\ Z = d - \frac{1 + a\delta}{A} \mu_2 + \frac{1}{2A^2} \left\{ A^2 (1 + a\delta) \left[\frac{\Lambda}{\mu_2} + \frac{1 + a\delta}{R_2} \right] - 2\mu_2 [A a_1 - B_1 (1 + a\delta)] \right\} \rho^2 \end{array} \right. \quad \text{au 4° ordre près.}$$

Les termes en $\rho \cos \theta$, $\rho^3 \cos \theta$, $x_0 \rho^3 \cos^3 \theta$, $\rho \sin \theta$, $\rho^3 \sin \theta$, $x_0 \rho^3 \sin 2\theta$, $x_0 \rho \cos \theta$, sont identiquement nuls.

La première nappe de caustique se réduit à une droite située dans le plan ZOY. Ses équations peuvent encore s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{b}{A} x_0 + \left\{ \frac{B_3}{A} (1 + a\delta) - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\delta}{A} \right) \right\} x_0 \rho^2, \\ Y = 0, \\ Z = d - \frac{1 + a\delta}{A} \mu_2 + \frac{1}{2A^2} \rho^2. \end{array} \right.$$

En prenant comme origine le point image de Gauss et comme plan XOY le plan image de Gauss, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \left\{ \frac{B_3}{A} (1 + a\delta) - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\delta}{A} \right) \right\} x_0 \rho^2, \\ Y = 0, \\ Z_1 = \frac{1}{2A^2} \rho^2. \end{array} \right.$$

Recherche de la deuxième nappe.

Les directrices à l'incidence se projettent sur le plan XOY suivant les droites :

$$\gamma_1 = \beta \left(x_1 - \frac{c}{A} x_0 \right).$$

Si l'on adopte les coordonnées polaires avec OX comme axe et le point de concours des droites directrices comme pôle, on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta + \frac{c}{A} x_0, \\ \gamma_1 &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

L'équation de la directrice à l'incidence se réduit à :

$$\operatorname{tg} \theta = \beta \quad \text{ou} \quad \theta = C^{\text{te}}.$$

On obtiendra facilement la nouvelle expression des équations géométriques et optiques, il suffit en effet de remplacer dans celles obtenues plus haut $\frac{\beta}{\mathcal{A}}$ par $\frac{C}{\mathcal{A}}$.

On a ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_s = (W' + Q'\rho^3)x_0 + [\rho(1 + a\delta) + a_i\rho^3] \cos \theta + 2T'x_0\rho^3 \cos^2 \theta & \text{au 5° ordre près,} \\ y_s = [\rho(1 + a\delta) + a_i\rho^3] \sin \theta + T'x_0\rho^3 \sin 2\theta & \text{au 5° ordre près,} \\ z_s = d + \frac{\rho^3(1 + a\delta)^2}{2R_s} + \frac{W'(1 + a\delta)}{R_s} x_0\rho \cos \theta & \text{au 4° ordre près;} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{X}_s = (U' + V'\rho^3)x_0 + (A\rho + B_i\rho^3) \cos \theta + 2S'x_0\rho^3 \cos^2 \theta & \text{au 5° ordre près,} \\ \mathcal{Y}_s = (A\rho + B_i\rho^3) \sin \theta + S'x_0\rho^3 \sin 2\theta & \text{au 5° ordre près,} \\ \mathcal{W}_s = \mu_s - \frac{A^3\rho^3}{2\mu_s} - \frac{AU'}{\mu_s} x_0\rho \cos \theta & \text{au 4° ordre près.} \end{array} \right.$$

avec :

$$\begin{aligned} B_i \frac{C}{\mathcal{A}} - \frac{B_s - B_3}{2} &= S', & a_i \frac{C}{\mathcal{A}} - \frac{a_s - a_3}{2} &= T', \\ A \frac{C}{\mathcal{A}} - B &= U', & B_i \frac{C}{\mathcal{A}} - B_3 &= V', \\ (1 + a\delta) \frac{C}{\mathcal{A}} - b\delta &= W', & a_i \frac{C}{\mathcal{A}} - a_3 &= Q'. \end{aligned}$$

Comme plus haut, on obtiendra une développable de la deuxième famille en faisant $\theta = C^{\text{te}}$ dans les équations du rayon émergent. On arrive à des équations de la forme :

$$\begin{aligned} X &= f_1'(\rho) + \lambda\varphi_1'(\rho), \\ Y &= f_2'(\rho) + \lambda\varphi_2'(\rho), \\ Z &= f_3'(\rho) + \lambda\varphi_3'(\rho). \end{aligned}$$

Pour trouver l'arête de rebroussement de chaque développable, c'est-à-dire une géodésique de la deuxième nappe de caustique, il suffit de chercher une fonction $\lambda = \varphi(\rho)$ satisfaisant à

$$\frac{dY}{\mathcal{W}_2} = \frac{dZ}{\mathcal{W}_2}$$

ou

$$\frac{dY_s + \lambda d\mathcal{W}_s}{\mathcal{W}_s} = \frac{dz_s + \lambda d\mathcal{W}_s}{\mathcal{W}_s}.$$

Comme ρ est la seule variable, la condition à satisfaire s'écrit :

$$\frac{\frac{\partial y_2}{\partial \rho} + \lambda \frac{\partial \mathbb{b}_2}{\partial \rho}}{\mathbb{b}_2} = \frac{\frac{\partial z_2}{\partial \rho} + \lambda \frac{\partial \mathbb{b}_2}{\partial \rho}}{\mathbb{b}_2}.$$

Or, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_2}{\partial \rho} = (1 + a\delta) \sin \theta + 3a_1 \rho^2 \sin \theta + 2T' x_0 \alpha \sin 2\theta, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \rho} = \frac{(1 + a\delta)^2}{R_2} \rho + W' \frac{(1 + a\delta)}{R_2} x_0 \cos \theta, \\ \frac{\partial \mathbb{b}_2}{\partial \rho} = A \sin \theta + 3B_1 \rho^2 \sin \theta + 2S' x_0 \rho \sin 2\theta, \\ \frac{\partial \mathbb{b}_2}{\partial \rho} = -\frac{A^2 \rho}{\mu_2} - \frac{AU'}{\mu_2} x_0 \cos \theta. \end{cases}$$

La condition précédente devient :

$$\begin{aligned} & \left[(1 + a\delta) \sin \theta + 3a_1 \rho^2 \sin \theta + 2T' x_0 \rho \sin 2\theta \right] \left[\mu_2 - \frac{A^2 \rho^2}{2\mu_2} - \frac{AU'}{\mu_2} x_0 \rho \cos \theta \right] \\ & - \left[\frac{(1 + a\delta)^2}{R_2} \rho + W' \frac{(1 + a\delta)}{R_2} x_0 \cos \theta \right] \left[(A\rho + B_1 \rho^3) \sin \theta + S' x_0 \rho^2 \sin 2\theta \right] \\ & + \lambda \left[A \sin \theta + 3B_1 \rho^2 \sin \theta + 2S' x_0 \rho \sin 2\theta \right] \left[\mu_2 - \frac{A^2 \rho^2}{2\mu_2} - \frac{AU'}{\mu_2} x_0 \rho \cos \theta \right] \\ & + \lambda \left[\frac{A^2 \rho}{\mu_2} + \frac{AU'}{\mu_2} x_0 \cos \theta \right] \left[(A\rho + B_1 \rho^3) \sin \theta + S' x_0 \rho^2 \sin 2\theta \right] = 0. \end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

λ_0 étant fini, ε_1 du 1^{er} ordre, ε_2 du 2^e ordre, ε_3 du 3^e ordre.

Écrivons que les termes des différents ordres du développement précédent sont identiquement nuls.

Le terme fini est :

$$[(1 + a\delta) + \lambda_0 A] \mu_2 \sin \theta,$$

d'où :

$$\lambda_0 = -\frac{1 + a\delta}{A}.$$

Le terme du 1^{er} ordre est :

$$\varepsilon_1 A \mu_2 \sin \theta, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_1 = 0.$$

Le terme du 2^e ordre est :

$$A \mu_2 \sin \theta \left[\varepsilon_2 + \left\{ 3 \left(\frac{a_1}{A} - B_1 \frac{1+a\delta}{A^2} \right) - \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{1+a\delta}{R_2} + \frac{A}{\mu_2} \right) \right\} \rho^2 \right],$$

d'où :

$$\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{1+a\delta}{R_2} + \frac{A}{\mu_2} \right) + 3 \left(B_1 \frac{1+a\delta}{A^2} - \frac{a_1}{A} \right) \right\} \rho^2.$$

Le terme du 3^e ordre est :

$$A \mu_3 \sin \theta \left[\varepsilon_3 + \left\{ \frac{4T'}{A} - \frac{4S'(1+a\delta)}{A^2} - \frac{U'(1+a\delta)}{\mu_2^2} - \frac{W'(1+a\delta)}{\mu_2 R_2} \right\} x_0 \rho \cos \theta \right],$$

d'où :

$$\varepsilon_3 = \left\{ \frac{4S'(1+a\delta)}{A^2} + \frac{U'(1+a\delta)}{\mu_2^2} + \frac{W'(1+a\delta)}{\mu_2 R_2} - \frac{4T'}{A} \right\} x_0 \rho \cos \theta.$$

On a, par suite, pour la deuxième nappe de caustique :

$$\begin{aligned} X = & (W' + Q'\rho^2)x_0 + [\rho(1+a\delta) + a_1\rho^3] \cos \theta + 2T'x_0\rho^2 \cos^2 \theta \\ & - \frac{1+a\delta}{A} (U' + V'\rho^2)x_0 - \frac{1+a\delta}{A} (A\rho + B_1\rho^3) \cos \theta - \frac{1+a\delta}{A} 2S'x_0\rho^2 \cos^2 \theta \\ & + \left\{ \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{1+a\delta}{R_2} + \frac{A}{\mu_2} \right) + 3 \left(B_1 \frac{1+a\delta}{A^2} - \frac{a_1}{A} \right) \right\} [U'x_0 + A\rho \cos \theta] \rho^2 \\ & + \left\{ \frac{4S'(1+a\delta)}{A^2} + \frac{U'(1+a\delta)}{\mu_2^2} + \frac{W'(1+a\delta)}{\mu_2 R_2} - \frac{4T'}{A} \right\} A x_0 \rho^3 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

au 5^e ordre près.

$$\begin{aligned} Y = & [\rho(1+a\delta) + a_1\rho^3] \sin \theta + T'x_0\rho^2 \sin 2\theta \\ & - \frac{1+a\delta}{A} (A\rho + B_1\rho^3) \sin \theta - \frac{1+a\delta}{A} S'x_0\rho^2 \sin 2\theta \\ & + \left\{ \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{1+a\delta}{R_2} + \frac{A}{\mu_2} \right) + 3 \left(B_1 \frac{1+a\delta}{A^2} - \frac{a_1}{A} \right) \right\} A \rho^3 \sin \theta \\ & + \left\{ \frac{4S'(1+a\delta)}{A^2} + \frac{U'(1+a\delta)}{\mu_2^2} + \frac{W'(1+a\delta)}{\mu_2 R_2} - \frac{4T'}{A} \right\} A x_0 \rho^3 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

au 5^e ordre près.

$$\begin{aligned} Z = & d + \frac{(1+a\delta)^2}{2R_2} \rho^2 + \frac{W'(1+a\delta)}{R_2} x_0 \rho \cos \theta \\ & - \frac{1+a\delta}{A} \mu_2 + \frac{(1+a\delta)A}{2\mu_2} \rho^2 + \frac{(1+a\delta)U'}{\mu_2} x_0 \rho \cos \theta \\ & + \left\{ \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{1+a\delta}{R_2} + \frac{A}{\mu_2} \right) + 3 \left(B_1 \frac{1+a\delta}{A^2} - \frac{a_1}{A} \right) \right\} \mu_2 \rho^2 \\ & + \left\{ \frac{4S'(1+a\delta)}{A^2} + \frac{U'(1+a\delta)}{\mu_2^2} + \frac{W'(1+a\delta)}{\mu_2 R_2} - \frac{4T'}{A} \right\} \mu_2 x_0 \rho \cos \theta \end{aligned}$$

au 4^e ordre près.

Après réduction, il vient :

$$\begin{aligned} X = & \left(W' - \frac{1+a\delta}{A} U' \right) x_0 + \frac{1}{A\mu_2} \left\{ A^2(1+a\delta) \left[\frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right] - 2\mu_2 [Aa_1 - B_1(1+a\delta)] \right\} \rho^2 \cos \theta \\ & + 3 \left\{ \frac{B_3}{A} (1+a\delta) - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} x_0 \rho^2 \quad \text{au 5° ordre près.} \end{aligned}$$

Le terme en $x_0 \rho^2 \cos^2 \theta$ disparaît, parce que son coefficient est $\frac{C-B}{A\mu_2}$ (grandeur du 2° ordre); l'élément devenant du 5° ordre doit être négligé.

$$Y = \frac{1}{A\mu_2} \left\{ A^2(1+a\delta) \left[\frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right] - 2\mu_2 [Aa_1 - B_1(1+a\delta)] \right\} \rho^2 \sin \theta$$

au 5° ordre près.

Pour la même raison que précédemment, le terme en $x_0 \rho^2 \sin \theta \cos \theta$ doit être négligé.

$$Z = d - \frac{1+a\delta}{A} \mu_2 + \frac{3}{2A^2} \left\{ A^2(1+a\delta) \left[\frac{A}{\mu_2} + \frac{1+a\delta}{R_2} \right] - 2\mu_2 [(Aa_1 - B_1(1+a\delta))] \right\} \rho^2$$

au 4° ordre près.

Le coefficient du terme en $x_0 \rho^2 \cos \theta$ est $2 \frac{C-B}{A^2\mu_2}$. Cet élément devient, par suite, du 4° ordre, et doit être négligé.

Ces équations peuvent encore s'écrire :

$$\begin{cases} X = \frac{b}{A} x_0 + \frac{A}{A\mu_2} \rho^2 \cos \theta + 3 \left\{ \frac{B_3(1+a\delta)}{A} - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} x_0 \rho^2, \\ Y = \frac{A}{A\mu_2} \rho^2 \sin \theta, \\ Z = d - \frac{1+a\delta}{A} \mu_2 + \frac{3A}{2A^2} \rho^2. \end{cases}$$

Cette surface est de révolution autour de la droite caustique à laquelle se réduit la première nappe. La méridienne située dans le plan XOZ est :

$$\begin{cases} X = \frac{b}{A} x_0 + \frac{A}{A\mu_2} \rho^2 + 3 \left\{ \frac{B_3(1+a\delta)}{A} - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} x_0 \rho^2, \\ Z = d - \frac{1+a\delta}{A} \mu_2 + \frac{3A}{2A^2} \rho^2. \end{cases}$$

Adoptons comme origine le point image de Gauss et prenons comme axes de coordonnées la droite caustique et une direction perpendiculaire. Le nouvel axe des x fait avec le précédent un angle φ tel que l'on a :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{2m^2 x_0^2 \Lambda^4}{\mathfrak{A}^3} + 8^\circ \text{ ordre.}$$

$$\sin \varphi = -\frac{2mx_0 \Lambda^2}{\mathfrak{A}} + 6^\circ \text{ ordre.}$$

$$m \text{ désigne le facteur } \left\{ \frac{B_3(1 + a\hat{z})}{A} - a_3 + \frac{B}{A} \left(a_4 - B_4 \frac{1 + a\hat{z}}{A} \right) \right\}$$

Les équations de la méridienne deviennent :

$$\begin{cases} X' = \frac{\mathfrak{A}}{\Lambda \mu_2} \rho^3 & \text{au } 5^\circ \text{ ordre près.} \\ Z' = \frac{3\mathfrak{A}}{2\Lambda^2} \rho^3 & \text{au } 4^\circ \text{ ordre près.} \end{cases}$$

C'est une parabole semi-cubique dont l'équation peut encore s'écrire :

$$\left[X' \frac{\Lambda \mu_2}{\mathfrak{A}} \right]^2 = \left[Z' \frac{2\Lambda^2}{3\mathfrak{A}} \right]^3$$

On obtient ainsi, comme deuxième nappe de caustique, une *surface de révolution dont la méridienne est une parabole semi-cubique et l'axe de révolution la droite caustique*.

Détermination directe de la caustique.

On peut obtenir les équations de la caustique comme dans le cas d'un dioptré unique, sans passer par l'intermédiaire des courbes diaphragmes. Les équations des rayons réfractés sont :

$$\begin{cases} X = x_2 + \lambda \mathfrak{A}_2, \\ Y = y_2 + \lambda \mathfrak{B}_2, \\ Z = z_2 + \lambda \mathfrak{C}_2. \end{cases}$$

Les valeurs de λ qui correspondent aux points focaux satisfont aux équations :

$$\begin{cases} dx_2 + \lambda d\mathcal{L}_2 - R\mathcal{L}_2 = 0, \\ dy_2 + \lambda d\mathcal{M}_2 - R\mathcal{M}_2 = 0, \\ dz_2 + \lambda d\mathcal{N}_2 - R\mathcal{N}_2 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que ce sont les solutions de :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial y_1} & \mathcal{L}_2 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial y_1} & \mathcal{M}_2 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y_1} & \mathcal{N}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on tient compte des équations optiques et géométriques et si l'on pose :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

λ_0 étant fini,

ε_1 étant une grandeur du 1^{er} ordre,

ε_2 — — — 2^e ordre,

ε_3 — — — 3^e ordre,

l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+a\delta)+\lambda_0 A+\varepsilon_1 A}{(1+a\delta)^2+\gamma_1^2} - 2a_2 x_0 x_4 \\
& + \lambda_0 B_1(3x_1^2+\gamma_1^2) - 2\lambda_0 B_2 x_0 x_4 \\
& + \varepsilon_5 A \\
& + \varepsilon_1 B_1(3x_1^2+\gamma_1^2) \\
& + \varepsilon_3 A \\
& 2a_1 x_1 y_4 \\
& + 2\lambda_0 B_1 x_1 y_4 \\
& + 2B_1 \varepsilon_1 x_1 y_4 \\
& + \varepsilon_3 A \\
& (1+a\delta)+\lambda_0 A+\varepsilon_1 A \\
& + a_1(x_1^2+3y_1^2) - (a_2-a_3)x_0 x_4 \\
& + \lambda_0(B_2-B_3)x_0 y_4 \\
& + 2B_1 \varepsilon_1 x_1 y_4 \\
& + \varepsilon_3 A \\
& \frac{(1+a\delta)^2}{R_s} - \frac{A^2}{\lambda_0 \mu_2} x_4 - \frac{(1+a\delta)}{R_g} b\delta x_0 \\
& + \lambda_0 \frac{AB}{\mu_2} x_0 \\
& + \varepsilon_1 \frac{A^2}{\mu_2} x_1 \\
& \frac{2a_1 x_1 y_4}{2a_2 x_0 x_4} - 2\lambda_0 B_3 x_0 y_4 \\
& + 2\varepsilon_1 B_1 x_1 y_4 \\
& + 2\varepsilon_3 A \\
& \frac{Ax_1 - Bx_0}{2\mu_2} \\
& \frac{[(1+a\delta)^2]{\frac{A^2}{\lambda_0 \mu_2}} x_4 - \frac{(1+a\delta)}{R_g} y_1 - \varepsilon_1 \frac{A^2}{\mu_2} y_1}{\mu_2} \\
& - A^2 \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\mu_2}
\end{aligned}$$

On verra par la suite qu'il est inutile d'écrire ici les termes du 3^e ordre dans les deux premiers éléments de la dernière ligne.

Les termes écrits suffisent à pousser le développement du déterminant jusqu'au 5^e ordre, sans omission.

Le terme fini est :

$$\mu_2[(1 + a\hat{z}) + \lambda_0\Lambda]^2,$$

d'où :

$$\lambda_0 = -\frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda}.$$

Le terme du 1^{er} ordre est identiquement nul.

Le terme du 2^e ordre est :

$$\mu_2(\varepsilon_1\Lambda)^2, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_1 = 0.$$

Le terme du 3^e ordre est identiquement nul. Il est à remarquer qu'aucune omission ne peut provenir des éléments du 3^e ordre qui ne figurent pas dans le tableau, étant donné la valeur obtenue pour λ_0 . Puisque $\varepsilon_1 = 0$, on pourra même pousser le développement jusqu'au 5^e ordre.

Le terme du 4^e ordre est :

$$\left\{ \begin{aligned} &-(1 + a\hat{z}) \left(\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right) x_1^2 \left[\Lambda \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) (x_1^2 + y_1^2) + \varepsilon_2 \Lambda^2 \right] \\ &-(1 + a\hat{z}) \left(\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right) y_1^2 \left[\Lambda \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) (x_1^2 + y_1^2) + \varepsilon_2 \Lambda^2 \right] \\ &+ \mu_2 \left[\left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right)^2 3(x_1^2 + y_1^2)^2 + 4\varepsilon_2 \Lambda \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) (x_1^2 + y_1^2) + \varepsilon_2^2 \Lambda \right]. \end{aligned} \right.$$

En posant :

$$\varepsilon_2 = \theta(x_1^2 + y_1^2),$$

le développement précédent s'écrit :

$$\Lambda^2 \mu_2 (x_1^2 + y_1^2)^2 \left\{ \theta^2 + \theta \left[\frac{4}{\Lambda} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \frac{1 + a\hat{z}}{\mu_2} \left(\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\Lambda} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) \left(\frac{3}{\Lambda} \left[a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right] - \frac{1 + a\hat{z}}{\mu_2} \left[\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right] \right) \right\},$$

d'où :

$$\theta^2 + \theta \left[\frac{4}{\Lambda} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \frac{1 + a\hat{z}}{\mu_2} \left(\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right) \right] \\ + \frac{1}{\Lambda} \left(a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right) \left(\frac{3}{\Lambda} \left[a_1 - B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} \right] - \frac{1 + a\hat{z}}{\mu_2} \left[\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right] \right) = 0,$$

ou

$$\left[\theta - \frac{1}{\Lambda} \left(B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} - a_1 \right) \right] \left[\theta - \left\{ \frac{1 + a\hat{z}}{\mu_2} \left(\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right) + \frac{3}{\Lambda} \left(B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} - a_1 \right) \right\} \right] = 0,$$

et

$$\varepsilon_2 = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\Lambda} \left(B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} - a_1 \right) (x_1^2 + y_1^2) \\ &\left\{ \frac{1 + a\hat{z}}{\mu_2} \left(\frac{1 + a\hat{z}}{R_2} + \frac{\Lambda}{\mu_2} \right) + \frac{3}{\Lambda} \left(B_1 \frac{1 + a\hat{z}}{\Lambda} - a_1 \right) \right\} (x_1^2 + y_1^2). \end{aligned} \right.$$

Le terme du 5^e ordre est :

$$\begin{aligned} & \Lambda \varepsilon_3 (x_1^2 + y_1^2) \left[\left\{ 4\mu_3 \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \Lambda(1+a\hat{z}) \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_3} + \frac{\Lambda}{\mu_3} \right) \right\} + 2\Lambda\mu_3 \frac{\varepsilon_3}{(x_1^2 + y_1^2)} \right] \\ & + \Lambda \varepsilon_3 x_1 x_0 \left[B(1+a\hat{z}) \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_3} + \frac{\Lambda}{\mu_3} \right) + \Lambda(1+a\hat{z}) \left(\frac{b\hat{z}}{R_3} + \frac{B}{\mu_3} \right) - 3\mu_3 a_3 + \mu_3 a_1 + 3\mu_3 B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} - \mu_3 B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right] \\ & + x_1 x_0 (x_1^2 + y_1^2) \left[(1+a\hat{z}) \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_3} + \frac{\Lambda}{\mu_3} \right) \left\{ B \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) + \Lambda \left(a_3 - a_1 - B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} + B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \Lambda(1+a\hat{z}) \left(\frac{b\hat{z}}{R_3} + \frac{B}{\mu_3} \right) \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) + \mu_3 \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) \left(3a_3 - 5a_1 - 3B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} + 5B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

En écrivant que ce terme est identiquement nul, et en remplaçant ε_2 par chacune des valeurs trouvées précédemment, on obtient pour ε_3 les deux valeurs :

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = & \left\{ \frac{1}{\Lambda} \left\{ (a_3 - a_1) - \frac{B_3 - B_1}{\Lambda} (1+a\hat{z}) \right\} x_1 x_0, \right. \\ & \left. \left\{ \frac{2}{\Lambda} \left(a_3 - B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \frac{1+a\hat{z}}{\mu_3} \left[\frac{b\hat{z}}{R_3} + \frac{B}{\mu_3} + \frac{B}{\Lambda} \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_3} + \frac{\Lambda}{\mu_3} \right) \right] \right\} x_1 x_0. \right. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} + \frac{1}{\Lambda} \left(B_1 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} - a_1 \right) (x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{\Lambda} \left\{ (a_3 - a_1) - \frac{B_3 - B_1}{\Lambda} (1+a\hat{z}) \right\} x_1 x_0 \\ -\frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} + \left\{ \frac{1+a\hat{z}}{\mu_3} \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_3} + \frac{\Lambda}{\mu_3} \right) + \frac{3}{\Lambda} \left(B_1 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} - a_1 \right) \right\} (x_1^2 + y_1^2) \\ + \left\{ \frac{2}{\Lambda} \left(a_3 - B_3 \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \frac{1+a\hat{z}}{\mu_3} \left[\frac{b\hat{z}}{R_3} + \frac{B}{\mu_3} + \frac{B}{\Lambda} \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_3} + \frac{\Lambda}{\mu_3} \right) \right] \right\} x_1 x_0. \end{cases}$$

Si l'on fait, dans la première valeur trouvée pour λ , le changement de variables défini par :

$$x = \rho \cos \theta + \frac{B}{\Lambda} x_0, \quad y = \rho \sin \theta,$$

et, dans la deuxième, le changement défini par :

$$x = \rho \cos \theta + \frac{C}{\Lambda} x_0, \quad y = \rho \sin \theta,$$

on retrouve les deux expressions obtenues au paragraphe précédent.

En remplaçant, dans les équations du rayon émergent, λ par les valeurs ainsi déterminées, on obtient pour la caustique des équations identiques à celles qui ont été écrites plus haut.

Les considérations faites à la fin du chapitre III s'appliquent encore au cas actuellement traité.

CHAPITRE V.

Cas général.

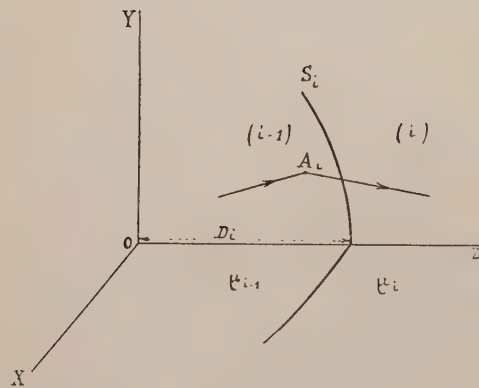


FIG. 12.

On prend comme axe Oz l'axe du système. Les milieux séparés par les surfaces sphériques $S_1, S_2, \dots, S_i$ ont les indices $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_i$. Les rayons de ces surfaces sont $R_1, \dots, R_i$ avec la même convention de signe que plus haut.

x_i, y_i, z_i désignent les coordonnées du point A_i où un rayon subit la i^{me} réfraction.

D_i désigne l'abscisse du sommet du i^{me} dioptré et d_i l'épaisseur du i^{me} milieu comptée suivant l'axe, de telle sorte que :

$$D_i - D_{i-1} = d_{i-1};$$

L_i, M_i, N_i sont les cosinus directeurs de la normale au dioptré en A_i .

l_i, m_i, n_i sont les cosinus directeurs d'un rayon après sa i^{me} réfraction.

Comme au chapitre IV, $\mu_i l_i, \mu_i m_i, \mu_i n_i$ sont représentées par $\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$, et l'on pose $\frac{d_i}{\mu_i} = \delta_i$.

Avec la même approximation qu'au chapitre II, l'équation de S_i est :

$$z_i = D_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R_i} + \frac{(x_i^2 + y_i^2)^2}{8R_i^3}.$$

Équations géométriques donnant les coordonnées de Λ_i .

Les équations du rayon $\Lambda_{i-1}\Lambda_i$ s'écrivent :

$$\frac{X - x_{i-1}}{l_{i-1}} = \frac{Y - y_{i-1}}{m_{i-1}} = \frac{Z - z_{i-1}}{n_{i-1}} = R,$$

d'où :

$$Z = Rn_{i-1} + z_{i-1}.$$

On a pour le point Λ_i :

$$z_i = Rn_{i-1} + z_{i-1} = D_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R_i} + \frac{(x_i^2 + y_i^2)^2}{8R_i^3},$$

d'où :

$$R = \frac{1}{n_{i-1}} \left\{ D_i - D_{i-1} + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R_i} - \frac{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2}{2R_{i-1}} + \frac{(x_i^2 + y_i^2)^2}{8R_i^3} - \frac{(x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2)^2}{8R_{i-1}^3} \right\}$$

ou,

$$R = \frac{1}{n_{i-1}} \left\{ d_{i-1} + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R_i} - \frac{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2}{2R_{i-1}} + \frac{(x_i^2 + y_i^2)^2}{8R_i^3} - \frac{(x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2)^2}{8R_{i-1}^3} \right\}.$$

Ce résultat est identique à celui trouvé pour le cas de 2 dioptries.

En raisonnant comme au chapitre IV, on établirait avec la même approximation les relations :

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + \mathcal{L}_{i-1}\delta_{i-1} + (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2)\mathcal{L}_{i-1}c_i \\ \quad + (\mathcal{L}_{i-1}^2 + \mathcal{M}_{i-1}^2)\mathcal{L}_{i-1}\delta_{i-1}^2e_i + (\mathcal{L}_{i-1}x_{i-1} + \mathcal{M}_{i-1}y_{i-1})\mathcal{L}_{i-1}\delta_{i-1}f_i, \\ y_i = y_{i-1} + \mathcal{M}_{i-1}\delta_{i-1} + (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2)\mathcal{M}_{i-1}c_i \\ \quad + (\mathcal{L}_{i-1}^2 + \mathcal{M}_{i-1}^2)\mathcal{M}_{i-1}\delta_{i-1}^2e_i + (\mathcal{L}_{i-1}x_{i-1} + \mathcal{M}_{i-1}y_{i-1})\mathcal{M}_{i-1}\delta_{i-1}f_i, \end{cases}$$

avec

$$\frac{d_{i-1}}{\varrho_{i-1}} = \delta_{i-1}, \quad \frac{1}{2\varrho_{i-1}} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) = c_i, \quad \frac{1}{2\varrho_{i-1}} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{d_i} \right) = e_i, \quad \frac{1}{R_i\varrho_{i-1}} = f_i.$$

Équations optiques en Λ_i .

Nous pouvons écrire, comme au chapitre II :

$$\frac{\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i-1}}{L_i} = \frac{\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i-1}}{M_i} = \frac{\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_{i-1}}{N_i} = \mathcal{K}_i,$$

d'où :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i = \mathcal{K}_i L_i + \mathcal{L}_{i-1}, \\ \mathcal{M}_i = \mathcal{K}_i M_i + \mathcal{M}_{i-1}, \\ \mathcal{N}_i = \mathcal{K}_i N_i + \mathcal{N}_{i-1}, \end{cases}$$

avec

$$L_i = -\frac{x_i}{R_i}, \quad M_i = -\frac{y_i}{R_i}, \quad N_i = 1 - \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R_i^2} - \frac{(x_i^2 + y_i^2)^2}{8R_i^4}.$$

En procédant comme il a été déjà fait, on trouve :

$$\tilde{H}_i = \mu_i - \mu_{i-1} + \varphi_i \mu_{i-1} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_i}$$

avec

$$\varphi_i = \frac{\ell_{i-1} x_{i-1} + \mathbb{b}_{i-1} y_{i-1}}{\mu_{i-1} R_i} \left(1 + \frac{d_{i-1}}{R_i} \right) + \frac{\ell_{i-1}^2 + \mathbb{b}_{i-1}^2}{2\mu_{i-1}^2} \left(1 + \frac{d_{i-1}}{R_i} \right)^2 + \frac{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2}{2R_i^2}.$$

Ce qui conduit aux expressions :

$$\begin{aligned} \ell_i = & x_i x_{i-1} + (1 + \alpha_i \delta_{i-1}) \ell_{i-1} + x_{i-1} (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2) \frac{\mu_{i-1}}{2\mu_i R_i^2} \alpha_i + \ell_{i-1} (\ell_{i-1} x_{i-1} + \mathbb{b}_{i-1} y_{i-1}) z_i \varepsilon_i \delta_{i-1} \\ & + \ell_{i-1} (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2) z_i \beta_i + (\ell_{i-1}^2 + \mathbb{b}_{i-1}^2) x_{i-1} z_i \theta_i \\ & + x_{i-1} (\ell_{i-1} x_{i-1} + \mathbb{b}_{i-1} y_{i-1}) \alpha_i \gamma_i + (\ell_{i-1}^2 + \mathbb{b}_{i-1}^2) \ell_{i-1} z_i \delta_{i-1} (\delta_i e_i + \theta_i) \end{aligned}$$

au 5^e ordre près,

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_i = & x_i y_{i-1} + (1 + \alpha_i \delta_{i-1}) \mathbb{b}_{i-1} + y_{i-1} (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2) \frac{\mu_{i-1}}{2\mu_i R_i^2} \alpha_i + \mathbb{b}_{i-1} (\ell_{i-1} x_{i-1} + \mathbb{b}_{i-1} y_{i-1}) z_i \varepsilon_i \delta_{i-1} \\ & + \mathbb{b}_{i-1} (x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2) z_i \beta_i + (\ell_{i-1}^2 + \mathbb{b}_{i-1}^2) y_{i-1} z_i \theta_i \\ & + y_{i-1} (\ell_{i-1} x_{i-1} + \mathbb{b}_{i-1} y_{i-1}) \alpha_i \gamma_i + (\ell_{i-1}^2 + \mathbb{b}_{i-1}^2) \mathbb{b}_{i-1} z_i \delta_{i-1} (\delta_i e_i + \theta_i) \end{aligned}$$

au 5^e ordre près.

avec

$$\begin{aligned} z_i = & -\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{R_i}, \quad 2\beta_i = 2c_i + \frac{d_{i-1}}{\mu_i R_i^2}, \quad \gamma_i = \frac{d_{i-1}}{\mu_i R_i} \left\{ \frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{R_i} \right\}, \\ \varepsilon_i = & \frac{1}{\mu_{i-1} R_i} + \frac{d_{i-1}}{\mu_i R_i} \left(\frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{R_i} \right), \quad \theta_i = \frac{d_{i-1}^2}{2\mu_{i-1} \mu_i} \left(\frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{R_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Si l'on connaît $x_i, y_i, \ell_i, \mathbb{b}_i$, on pourra ainsi déterminer $x_i, y_i, \ell_i, \mathbb{b}_i$. En conservant toujours la même approximation, on arrive à des expressions de la forme :

$$\begin{cases} x_i = gx_i + h\ell_i + g_1(x_i^2 + y_i^2)x_i + g_2\ell_i(x_i^2 + y_i^2) + g_3(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)x_i \\ \quad + g_4(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)\ell_i + g_5(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)x_i + g_6(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)\ell_i, \\ y_i = gy_i + h\mathbb{b}_i + g_1(x_i^2 + y_i^2)y_i + g_2\mathbb{b}_i(x_i^2 + y_i^2) + g_3(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)y_i \\ \quad + g_4(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)\mathbb{b}_i + g_5(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)y_i + g_6(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)\mathbb{b}_i; \\ \ell_i = Gx_i + H\ell_i + h_1(x_i^2 + y_i^2)x_i + h_2\ell_i(x_i^2 + y_i^2) + h_3(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)x_i \\ \quad + h_4(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)\ell_i + h_5(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)x_i + h_6(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)\ell_i, \\ \mathbb{b}_i = Gy_i + H\mathbb{b}_i + h_1(x_i^2 + y_i^2)y_i + h_2\mathbb{b}_i(x_i^2 + y_i^2) + h_3(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)y_i \\ \quad + h_4(\ell_i x_i + \mathbb{b}_i y_i)\mathbb{b}_i + h_5(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)y_i + h_6(\ell_i^2 + \mathbb{b}_i^2)\mathbb{b}_i. \end{cases}$$

Les coefficients g, h, G, H peuvent s'obtenir simplement. En effet, les termes linéaires des équations précédentes demeurent les mêmes si l'on considère $x_n, y_n, \mathcal{L}_n, \mathbb{M}_n$ seulement comme fonction linéaire de $x_{n-1}, y_{n-1}, \mathcal{L}_{n-1}, \mathbb{M}_{n-1}$.

On a alors :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + \delta_{n-1} \mathcal{L}_{n-1}, \\ \mathcal{L}_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 + \alpha_n \delta_{n-1}) \mathcal{L}_{n-1}. \end{cases} \quad \begin{cases} y_n = y_{n-1} + \delta_{n-1} \mathbb{M}_{n-1}, \\ \mathbb{M}_n = \alpha_n y_{n-1} + (1 + \alpha_n \delta_{n-1}) \mathbb{M}_{n-1}. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \delta_1 \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_2 = \alpha_2 x_1 + (1 + \alpha_2 \delta_1) \mathcal{L}_1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = y_1 + \delta_1 \mathbb{M}_1, \\ \mathbb{M}_2 = \alpha_2 y_1 + (1 + \alpha_2 \delta_1) \mathbb{M}_1. \end{cases}$$

D'après la théorie des déterminants, g, h, G, H seront les éléments d'un déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} g & h \\ G & H \end{vmatrix}$$

obtenu de la façon suivante :

On effectue la suite des opérations ci-dessous

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & 1 + \alpha_3 \delta_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \delta_1 & 1 + \alpha_2 \delta_1 \end{vmatrix} = \Delta_1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta_3 \\ \alpha_4 & 1 + \alpha_4 \delta_3 \end{vmatrix} \times \Delta_1 \text{ renversé} = \Delta_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta_{i-1} \\ \alpha_i & 1 + \alpha_i \delta_{i-1} \end{vmatrix} \times \Delta_{n-3} \text{ renversé} = \Delta.$$

On voit ainsi que $\Delta = 1$, puisque tous les déterminants partiels sont égaux à l'unité.

En remplaçant $\mathcal{L}_1$ et $\mathbb{M}_1$ par les expressions :

$$\mathcal{L}_1 = ax_1 - bx_0 + Px_1(x_1^2 + y_1^2) - \frac{2PR_1}{z_0} x_1 [x_1^2 + y_1^2 - x_1 x_0 - y_1 y_0],$$

$$\mathbb{M}_1 = ay_1 - by_0 + Py_1(x_1^2 + y_1^2) - \frac{2PR_1}{z_0} y_1 [x_1^2 + y_1^2 - x_1 x_0 - y_1 y_0],$$

on arrive finalement aux formes suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1er ordre} & \text{2e ordre} & \text{3e ordre} & \text{4e ordre} & & & \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & & \\
 x_i = a_i x_1 - b_i x_0 + a_{ii} x_1 (x_1^2 + y_1^2) - a_{2i} x_0 x_1^2 & & & & & & \\
 & & & - a_{3i} x_0 y_1^2 & & & \\
 & & & - (a_{2i} - a_{3i}) y_0 x_1 y_1 & \text{au 5e ordre près,} & & \\
 \left. \begin{array}{l} y_i = a_i y_1 - b_i y_0 + a_{ii} y_1 (x_1^2 + y_1^2) - a_{2i} y_0 y_1^2 \\ \quad - a_{3i} y_0 x_1^2 \\ \quad - (a_{2i} - a_{3i}) x_0 x_1 y_1 \end{array} \right\} & & & & \text{au 5e ordre près,} & & \\
 z_i = D_i + \frac{1}{2R_i} a_i^2 (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{R_i} a_i b_i (x_1 x_0 + y_1 y_0) + \frac{1}{2R_i} [b_i^2 (x_0^2 + y_0^2) + 2a_i a_{ii} (x_1^2 + y_1^2)^2] \\
 + \frac{1}{8R_i^3} a_i^4 (x_1^2 + y_1^2)^2 \text{ au 5e ordre près,}
 \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{llll}
 a_i = g + ah & (\text{fini}) & a_{ii} & (\text{fini}) \\
 b_i = hb & (1^{\text{er}} \text{ ordre}) & a_{2i} & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), \\
 & & a_{3i} & (1^{\text{er}} \text{ ordre}).
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1er ordre} & \text{2e ordre} & \text{3e ordre} & \text{4e ordre} & & & \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & & \\
 \left. \begin{array}{l} \mathcal{Q}_i = A_i x_1 - B_i x_0 + B_{ii} x_1 (x_1^2 + y_1^2) - B_{2i} x_0 x_1^2 \\ \quad - B_{3i} x_0 y_1^2 \\ \quad - (B_{2i} - B_{3i}) y_0 x_1 y_1 \\ \mathcal{M}_i = A_i y_1 - B_i y_0 + B_{ii} y_1 (x_1^2 + y_1^2) - B_{2i} y_0 y_1^2 \\ \quad - B_{3i} y_0 x_1^2 \\ \quad - (B_{2i} - B_{3i}) x_0 x_1 y_1 \\ \mathcal{W}_i = \mu_i - A_i^2 \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2\mu_i} + A_i B_i \frac{(x_1 x_0 + y_1 y_0)}{\mu_i} - B_i^2 \frac{x_0^2 + y_0^2}{2\mu_i} \\ \quad - A_i B_{ii} \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{\mu_i} \\ \quad - A_i^4 \frac{(x_1^2 + y_1^2)^3}{8\mu_i^3} \end{array} \right\} & & & & \text{au 5e ordre près,} & & \\
 & & & & \text{au 5e ordre près,} & & \\
 & & & & \text{au 5e ordre près,} & &
 \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{llll}
 A_i = G + Ha & (\text{fini}) & B_{ii} & (\text{fini}) \\
 B_i = Hb & (1^{\text{er}} \text{ ordre}) & B_{2i} & (1^{\text{er}} \text{ ordre}), \\
 & & B_{3i} & (1^{\text{er}} \text{ ordre}).
 \end{array}$$

Condition à satisfaire pour qu'une normale de rayons réfractés soit développable.

Courbes directrices du faisceau incident.

Les formules trouvées sont analogues à celles obtenues dans le cas de deux dioptries. La suite des calculs s'applique donc en remplaçant :

a_1	a_2	a_3	par	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}
B_1	B_2	B_3	—	B_{1i}	B_{2i}	B_{3i}
A	B	—	—	A_i	B_i	—
$1 + a\delta$	—	—	—	a_i	—	—
$b\delta$	—	—	—	b_i	—	—

Les rayons incidents qui formeront après la traversée du système une surface développable seront ceux qui satisfont à l'équation :

$$\begin{aligned} & dy_1^2 [A_i x_1 y_1 - C_i x_0 y_1 - B_i x_1 y_0] \\ & + dy_1 dx_1 [A_i (x_1^2 - y_1^2) - (B_i + C_i) (x_1 x_0 - y_1 y_0)] \\ & - dx_1^2 [A_i x_1 y_1 - C_i x_1 y_0 - B_i x_0 y_1] = 0. \end{aligned}$$

A, B, C sont remplacés par A_i, B_i, C_i .

En prenant x_1 comme variable indépendante et en faisant $y_0 = 0$, on a :

$$y_1'^2 y_1 (A_i x_1 - C_i x_0) + y_1' [A_i (x_1^2 - y_1^2) - (B_i + C_i) x_1 x_0] - y_1 (A_i x_1 - B_i x_0) = 0.$$

Les deux familles de courbes intégrales donnant les diaphragmes à placer à l'incidence pour isoler les surfaces développables à l'émergence seront :

Pour la première famille,

$$y_1^2 + x_1^2 - 2 \frac{B_i}{A_i} x_0 x_1 = x^2 - 2 \frac{B_i}{A_i} x x_0$$

en première approximation, et

$$y_1^2 + x_1^2 \left[1 - \frac{B_i C_i}{A_i^2} x_0^2 \right] - 2 \frac{B_i}{A_i} x_0 x_1 - \left[x^2 - 2 \frac{B_i}{A_i} x x_0 - \frac{B_i C_i}{A_i^2} x x_0^2 \right] = 0$$

en deuxième approximation.

Pour la deuxième famille,

$$y_1 = \beta \left(x_1 - \frac{C_i}{A_i} x_0 \right)$$

en première approximation, et

$$x_1^2 - \frac{x_1 y_1}{\beta} - \frac{C_i}{A_i} x_0 x_1 - \frac{B_i C_i}{2 A_i^2} \frac{1}{1 + \beta^2} x_0^2 = 0$$

en deuxième approximation.

DÉTERMINATION DE LA CAUSTIQUE.

Les équations d'un rayon émergent sont :

$$\begin{cases} X = x_i + \lambda \mathfrak{L}_i, \\ Y = y_i + \lambda \mathfrak{M}_i, \\ Z = z_i + \lambda \mathfrak{N}_i. \end{cases}$$

Les valeurs de λ qui correspondent aux points focaux satisfont aux équations :

$$\begin{cases} dx_i + \lambda d\mathfrak{L}_i - R\mathfrak{L}_i = 0, \\ dy_i + \lambda d\mathfrak{M}_i - R\mathfrak{M}_i = 0, \\ dz_i + \lambda d\mathfrak{N}_i - R\mathfrak{N}_i = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que ce sont les solutions de :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial x_1} & \frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial y_1} & \mathfrak{L}_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{M}_i}{\partial x_1} & \frac{\partial y_i}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{M}_i}{\partial y_1} & \mathfrak{M}_i \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{N}_i}{\partial x_1} & \frac{\partial z_i}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{N}_i}{\partial y_1} & \mathfrak{N}_i \end{vmatrix} = 0.$$

En tenant compte des équations optiques et géométriques et en posant comme au chapitre précédent

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

on trouve :

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{a_i}{\Lambda_i} + \frac{1}{\Lambda_i} \left(B_{2i} \frac{a_i}{\Lambda_i} - a_{2i} \right) (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{\Lambda_i} \left\{ (a_{2i} - a_{3i}) - \frac{B_{2i} - B_{3i}}{\Lambda_i} a_i \right\} x_i x_0 \\ -\frac{a_i}{\Lambda_i} + \left\{ \frac{a_i}{\mu_i} \left(\frac{a_i}{R_i} + \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \right) + \frac{3}{\Lambda_i} \left(B_{2i} \frac{a_i}{\Lambda_i} - a_{2i} \right) \right\} (x_i^2 + y_i^2) \\ + \left\{ \frac{2}{\Lambda_i} \left(a_{2i} - B_{2i} \frac{a_i}{\Lambda_i} \right) - \frac{a_i}{\mu_i} \left[\frac{b_i}{R_i} + \frac{B_i}{\mu_i} + \frac{B_i}{\Lambda_i} \left(\frac{a_i}{R_i} + \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \right) \right] \right\} x_i x_0. \end{cases}$$

Si l'on fait le changement de variables défini par

$$x_i = \rho \cos \theta + \frac{B_i}{\Lambda_i} x_0, \quad y_i = \rho \sin \theta,$$

on obtient pour la première nappe de caustique :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \left(a_i \frac{B_i}{\Lambda_i} - b_i \right) x_0 + \left\{ \frac{B_{3i}}{\Lambda_i} a_i - a_{3i} + \frac{B_i}{\Lambda_i} \left(a_{ii} - B_{ii} \frac{a_i}{\Lambda_i} \right) \right\} x_0 \rho^2 \quad \text{au 5° ordre près.} \\ Y = 0 \quad \text{au 5° ordre près.} \\ Z = D_i - \mu_i \frac{a_i}{\Lambda_i} + \frac{\Lambda_i}{2\Lambda_i^2} \rho^2 \quad \text{au 4° ordre près.} \end{array} \right.$$

En faisant le changement de variables défini par

$$x_i = \rho \cos \theta + \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i} x_0, \quad y_i = \rho \sin \theta,$$

on obtient pour la deuxième nappe de caustique :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \left(a_i \frac{B_i}{\Lambda_i} - b_i \right) x_0 + \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i \mu_i} \rho^3 \cos \theta + 3 \left\{ \frac{B_{3i}}{\Lambda_i} a_i - a_{3i} + \frac{B_i}{\Lambda_i} \left(a_{ii} - B_{ii} \frac{a_i}{\Lambda_i} \right) \right\} x_0 \rho^2 \quad \text{au 5° ordre près.} \\ Y = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i \mu_i} \rho^3 \sin \theta \quad \text{au 5° ordre près.} \\ Z = D_i - \mu_i \frac{a_i}{\Lambda_i} + \frac{3\Lambda_i}{2\Lambda_i^2} \rho^2 \quad \text{au 4° ordre près.} \end{array} \right.$$

On parvient ainsi à des résultats identiques à ceux obtenus dans le cas d'une lentille : la première nappe de caustique se réduit à une droite ; la deuxième nappe est une surface de révolution dont la méridienne est une parabole semi-cubique et l'axe de révolution la droite caustique.

CHAPITRE VI.

Cas de deux dioptries sphériques (lentille).

DEUXIÈME APPROXIMATION.

Je traite ici le même problème qu'au chapitre IV, mais en poussant l'approximation jusqu'au 5^e ordre en ce qui concerne les axes Ox et Oy et jusqu'au 4^e ordre en ce qui concerne l'axe Oz.

Les cosinus directeurs du rayon incident $\Lambda_0 \Lambda_1 (l_0 m_0 n_0)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0 = -\frac{x_1 - x_0}{z_0} - \frac{(x_1 - x_0)(x_1^2 + y_1^2)}{2z_0^2 R_1}, \\ m_0 = -\frac{y_1 - y_0}{z_0} - \frac{(y_1 - y_0)(x_1^2 + y_1^2)}{2z_0^2 R_1}, \\ n_0 = 1 - \frac{1}{2z_0^2} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \end{array} \right. \quad \text{au 6^e ordre près.}$$

Dans les équations optiques en Λ_1 , il nous faut calculer $\mathfrak{H}_1$ au 5^e ordre près. En suivant la même voie que précédemment, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1 &= \mu_1 - \mu_0 \\ &+ \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1} \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1^2} \\ &+ \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1} \left[\frac{x_1 l_0}{R_1} + \frac{y_1 m_0}{R_1} \right] \\ &+ \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1} \left[\frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^4} + \frac{l_0^2 + m_0^2}{2} \right] + \frac{\mu_0^2(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\mu_1^3} \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{4R_1^4}. \end{aligned}$$

d'où il résulte, pour les équations optiques en A_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_1 = ax_1 - bx_0 + b_1x_1(x_1^2 + y_1^2) - b_2x_0x_1^2 + b_4x_1(x_1^2 + y_1^2)^2 \\ \quad - b_3x_0y_1^2 + b_5(x_0^2 + y_0^2)x_1 \\ \quad - (b_1 - b_3)y_0x_1y_1, \\ \mathcal{M}_1 = ay_1 - by_0 + b_1y_1(x_1^2 + y_1^2) - b_2y_0y_1^2 + b_4y_1(x_1^2 + y_1^2)^2 \\ \quad - b_3y_0x_1^2 + b_5(x_0^2 + y_0^2)y_1 \\ \quad - (b_2 - b_3)x_0x_1y_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{1er ordre} \quad \text{2e ordre} \quad \text{3e ordre} \quad \text{4e ordre} \quad \text{5e ordre} \end{array} \quad \text{au 6e ordre près,}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= - \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{R_1} + \frac{\mu_0}{z_0} \right), \\ b &= - \frac{\mu_0}{z_0}, \\ b_1 &= - \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{2\mu_1 R_1^2} + \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1 R_1^2 z_0} - \frac{\mu_0}{2R_1 z_0^2} \left[\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1} + 1 \right], \\ b_2 &= \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1 R_1^2 z_0} - \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_1 R_1 z_0^2} - \frac{\mu_0}{2R_1 z_0^2}, \\ b_3 &= - \frac{\mu_0}{2R_1 z_0^2}, \\ b_4 &= - \frac{\mu_0}{8\mu_1 R_1^5} \left[\mu_0 \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{\mu_1^2} + \mu_1 - \mu_0 \right], \\ b_5 &= - \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{2\mu_1 R_1 z_0^2}. \end{aligned}$$

Équations géométriques donnant les coordonnées de A_1 .

On a toujours :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = Rl_1 + x_1, \\ y_2 = Rm_1 + y_1, \\ z_2 = d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{8R_2^3}, \end{array} \right.$$

avec

$$R = d + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} + d \frac{l_1^2 + m_1^2}{2} \\ + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^3} - \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^3} + \frac{(l_1^2 + m_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{4R_2} - \frac{(l_1^2 + m_1^2)(x_1^2 + y_1^2)}{4R_1} + \frac{3}{8} d(l_1^2 + m_1^2)^2$$

au 5° ordre près.

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_1 + dl_1 \\ \quad + l_1 \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2} - l_1 \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1} + l_1 d \frac{l_1^2 + m_1^2}{2} \\ \quad + l_1 \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^3} - l_1 \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{8R_1^3} + l_1 \frac{(l_1^2 + m_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{4R_2} - l_1 \frac{(l_1^2 + m_1^2)(x_1^2 + y_1^2)}{4R_1} + \frac{3}{8} dl_1(l_1^2 + m_1^2)^2 \\ y_3 = \text{expression analogue obtenue en permutant } x_i, l_i \text{ avec } y_i \text{ et } m_i. \end{array} \right.$$

au 6° ordre près,

Il suffit de déterminer les grandeurs $(x_2^2 + y_2^2)$ et $(x_1^2 + y_1^2)^2$ qui figurent dans le deuxième membre au 5° ordre près. On obtient finalement, après réduction et en tenant compte des valeurs trouvées pour $\mathfrak{L}_i$ et $\mathfrak{M}_i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = (1 + a\delta)x_1 - b\delta x_0 + a_1x_1(x_1^2 + y_1^2) - a_2x_0x_1^2 + a_4x_1(x_1^2 + y_1^2)^2 \\ \quad - a_3x_0y_1^2 + a_5x_1(x_0^2 + y_0^2) \\ \quad - (a_2 - a_3)y_0x_1y_1 + a_6x_0(x_1x_0 + y_1y_0) \\ y_2 = (1 + a\delta)y_1 - b\delta y_0 + a_1y_1(x_1^2 + y_1^2) - a_2y_0y_1^2 + a_4y_1(x_1^2 + y_1^2)^2 \\ \quad - a_3y_0x_1^2 + a_5y_1(x_0^2 + y_0^2) \\ \quad - (a_2 - a_3)x_0x_1y_1 + a_6y_0(x_1x_0 + y_1y_0) \\ z_1 = d + \frac{(1 + a\delta)^2}{2R_2}(x_1^2 + y_1^2) - b\delta \frac{1 + a\delta}{R_1}(x_1x_0 + y_1y_0) + \frac{b^2\delta^2}{2R_2}(x_0^2 + y_0^2) \\ \quad + \frac{a_1(1 + a\delta)}{R_2}(x_1^2 + y_1^2)^2 \\ \quad + \frac{(1 + a\delta)^4}{8R_2^3}(x_1^2 + y_1^2)^3 \end{array} \right.$$

au 5° ordre près,

avec

$$(\text{fini}) \quad a_1 = b_1 \hat{z} + \frac{a}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{a^2 \hat{z}}{\mu_1 R_2} + \frac{a^2 \hat{z}^2}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right),$$

$$(1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad a_2 = b_2 \hat{z} + \frac{b}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + 2 \frac{ab \hat{z}}{\mu_1 R_2} + \frac{3}{2} \frac{a^2 b \hat{z}^2}{\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right),$$

$$(1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad a_3 = b_3 \hat{z} + \frac{b}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{ab \hat{z}}{\mu_1 R_2} + \frac{a^2 b \hat{z}^2}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right),$$

$$(\text{fini}) \quad a_4 = b_4 \hat{z} + \frac{b}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{a}{8\mu_1} \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3} \right) + \frac{2ab_1 \hat{z}}{\mu_1 R_2} + \frac{a^2 \hat{z}}{2\mu_1 R_2} \left[\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{d} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \\ + \frac{a^2 \hat{z}^2}{\mu_1} \left[\frac{1}{R_2^2} \left(\frac{3}{4R_2} + \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{2R_2 d} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{4d^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] + \frac{3a^2 b_1 \hat{z}^3}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) \\ + \frac{a^4 \hat{z}^3}{\mu_1 R_2} \left[\frac{1}{d^2} + \frac{1}{2R_2} \left(\frac{3}{d} + \frac{1}{R_2} \right) \right] + \frac{a^2 \hat{z}^4}{\mu_1} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_2^3} + \frac{3}{d^3} \right) + \frac{1}{4R_2 d^2} + \frac{1}{2R_2 d} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right) \right],$$

$$(2^{\text{e}} \text{ ordre}) \quad a_5 = b_5 \hat{z} + \frac{ab^2 \hat{z}^2}{2\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right),$$

$$(2^{\text{e}} \text{ ordre}) \quad a_6 = \frac{b^2 \hat{z}}{\mu_1 R_2} + \frac{ab^2 \hat{z}^2}{\mu_1} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{d} \right).$$

Équations optiques en A.

Dans les équations optiques :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 = \mathfrak{H}_2 \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{M}_2 = \mathfrak{H}_2 \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1, \\ \mathcal{N}_2 = \mathfrak{H}_2 \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1, \end{cases}$$

il nous faut déterminer $\mathfrak{H}_2$ au 5° ordre près.

En procédant comme il a été déjà fait, on trouve :

$$\mathfrak{H}_2 = (\mu_2 - \mu_1) + \frac{\mu_1}{\mu_2} (\mu_2 - \mu_1) \varphi_1 + \frac{\mu_1^2}{2\mu_2^2} (\mu_2^2 - \mu_1^2) \varphi_2^2 \quad \text{au } 5^{\text{e}} \text{ ordre près,}$$

avec

$$\varphi_2 = \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_2^2} + \frac{x_2 l_1}{R_2} + \frac{y_2 m_1}{R_2} + \frac{l_1^2 + m_1^2}{2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{8R_2^4} - \frac{(l_1^2 + m_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{4R_2^2} + \frac{l_1^2 + m_1^2}{8}.$$

Après réduction, on arrive au système :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &= Ax_1 - Bx_0 + B_1x_1(x_1^2 + y_1^2) - B_1x_0x_1^2 && + B_1x_1(x_1^2 + y_1^2)^2 \\
 &&& - B_3x_0y_1^2 && + B_3x_1(x_0^2 + y_0^2) \\
 &&& - (B_2 - B_3)y_0x_1y_1 + B_6x_0(x_0x_1 + y_0y_1)
 \end{aligned} \right\} && \text{au 6° ordre près,} \\
 \mathcal{M}_1 &= Ay_1 - By_0 + B_1y_1(x_1^2 + y_1^2) - B_3y_0y_1^2 && + B_1y_1(x_1^2 + y_1^2)^2 \\
 &&& - B_3y_0x_1^2 && + B_3y_1(x_0^2 + y_0^2) \\
 &&& - (B_2 - B_3)x_0x_1y_1 + B_6y_0(x_1x_0 + y_1y_0)
 \end{aligned} \right\} && \text{au 6° ordre près,} \\
 \mathcal{N}_1 &= \mu_2 - \frac{A^2}{2\mu_2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{AB}{\mu_2}(x_1x_0 + y_1y_0) - \frac{B^2}{2\mu_2}(x_0^2 + y_0^2) \\
 &&& - \frac{AB_1}{\mu_2}(x_1^2 + y_1^2)^2 \\
 &&& - \frac{A^4}{8\mu_2^3}(x_1^2 + y_1^2)^2
 \end{aligned} \right\} && \text{au 5° ordre près,}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (\text{fini}) \quad A &= a - (1 + a\delta) \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2}, \\
 (1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad B &= b \left[1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} \delta \right], \\
 (\text{fini}) \quad B_1 &= \left\{ b_1 - a_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} - \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 R_2} (1 + a\delta) \left[\frac{(1 + a\delta)^2}{2R_2^2} + \frac{a(1 + a\delta)}{\mu_1 R_2} + \frac{a^2}{2\mu_1^2} \right] \right\}, \\
 (1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad B_2 &= \left\{ b_2 - a_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 R_2} \left[\frac{3b\delta(1 + a\delta)^2}{2R_2^2} + \frac{b}{\mu_1 R_2} (1 + a\delta[4 + 3a\delta]) + \frac{ab}{\mu_1^2} (1 + \frac{3}{2}a\delta) \right] \right\}, \\
 (1^{\text{er}} \text{ ordre}) \quad B_3 &= \left\{ b_3 - a_3 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} - \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 R_2} b\delta \left[\frac{(1 + a\delta)^2}{2R_2^2} + \frac{a(1 + a\delta)}{\mu_1 R_2} + \frac{a^2}{2\mu_1^2} \right] \right\}, \\
 (\text{fini}) \quad B_4 &= \left\{ b_4 - a_4 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} - \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 R_2} \left[\frac{a^2 a_1}{2\mu_1^2} + (1 + a\delta) \left\{ \frac{1 + a\delta}{8R_2^4} \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3a_1(1 + a\delta)}{2R_2^2} - \frac{a^2(1 + a\delta)^2}{4\mu_1^2 R_2^2} + \frac{2aa_1 + b_1(1 + a\delta)}{\mu_1 R_2} + \frac{ab_1}{\mu_1^2} + \frac{a^4}{8\mu_1^4} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\mu_1^2(\mu_2^2 - \mu_1^2)(1 + a\delta)}{2\mu_2^3 R_2} \left[\frac{(1 + a\delta)^4}{4R_2^3} + \frac{a(1 + a\delta)^3}{\mu_1 R_2^3} + \frac{3a^2(1 + a\delta)^2}{2\mu_1^2 R_2^2} + \frac{a^2(1 + a\delta)}{\mu_1^3 R_2} + \frac{a^4}{4\mu_1^4} \right] \right\} \right\}, \\
 (2^{\text{e}} \text{ ordre}) \quad B_5 &= \left\{ b_5 - a_5 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} - \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 R_2} (1 + a\delta) b^2 \left[\frac{\delta^2}{2R_2^2} + \frac{\delta}{\mu_1 R_2} + \frac{1}{2\mu_1^2} \right] \right\}, \\
 (2^{\text{e}} \text{ ordre}) \quad B_6 &= \left\{ -a_6 \frac{\mu_2 - \mu_1}{R_2} - \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 R_2} \left[\frac{(1 + a\delta)\delta}{R_2^2} + \frac{1 + 2a\delta}{\mu_1 R_2} + \frac{a}{\mu_1^2} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Détermination de la caustique.

Si l'on veut obtenir les équations de la caustique avec les éléments du 5^e ordre, il faut ajouter un terme dans le développement de λ et poser :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4,$$

ε_4 étant une grandeur du 4^e ordre.

Les équations géométriques donnent, en supposant $y_0 = 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} &= (1 + a\tilde{z}) + a_1(3x_1^2 + y_1^2) - 2a_2x_0x_1 + a_4(x_1^2 + y_1^2)(5x_1^2 + y_1^2) \\ &\quad + (a_5 + a_6)x_0^2, \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 2a_1x_1y_1 - (a_2 - a_3)x_0y_1 + 4a_4x_1y_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} &= \frac{(1 + a\tilde{z})^2}{R_2}x_1 - \frac{b\tilde{z}(1 + a\tilde{z})}{R_2}x_0 + 4\left\{\frac{a_1(1 + a\tilde{z})}{R_2} + \frac{(1 + a\tilde{z})^4}{8R_2^3}\right\}x_1(x_1^2 + y_1^2); \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} &= 2a_1x_1y_1 - 2a_3x_0y_1 + 4a_4x_1y_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \frac{\partial y_3}{\partial y_1} &= (1 + a\tilde{z}) + a_1(x_1^2 + 3y_1^2) - (a_2 - a_3)x_0x_1 + a_4(x_1^2 + y_1^2)(x_1^2 + 5y_1^2) \\ &\quad + a_5x_0^2, \\ \frac{\partial z_3}{\partial y_1} &= \frac{(1 + a\tilde{z})^2}{R_2}y_1 + 4\left\{\frac{a_1(1 + a\tilde{z})}{R_2} + \frac{(1 + a\tilde{z})^4}{8R_2^3}\right\}y_1(x_1^2 + y_1^2). \end{aligned} \right.$$

Des équations optiques il résulte :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} &= A + B_1(3x_1^2 + y_1^2) - 2B_2x_0x_1 + B_4(x_1^2 + y_1^2)(5x_1^2 + y_1^2) \\ &\quad + (B_5 + B_6)x_0^2, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x_1} &= 2B_1x_1y_1 - (B_2 - B_3)x_0y_1 + 4B_4x_1y_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x_1} &= -\frac{A^2}{\mu_2}x_1 + \frac{AB}{\mu_2}x_0 - 4\left(\frac{AB_1}{\mu_2} + \frac{A^4}{8\mu_2^3}\right)x_1(x_1^2 + y_1^2); \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial y_1} &= 2B_1x_1y_1 - 2B_3x_0y_1 + 4B_4x_1y_1(x_1^2 + y_1^2), \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial y_1} &= A + B_1(x_1^2 + 3y_1^2) - (B_2 - B_3)x_0x_1 + B_4(x_1^2 + y_1^2)(x_1^2 + 5y_1^2) \\ &\quad + B_5x_0^2, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial y_1} &= -\frac{A^2}{\mu_2}y_1 - 4\left(\frac{AB}{\mu_2} + \frac{A^4}{8\mu_2^3}\right)y_1(x_1^2 + y_1^2). \end{aligned} \right.$$

L'équation qui fournit les points focaux devient alors :

$$\begin{aligned}
& (1+a\hat{z}) + \lambda_0 \underline{\underline{\underline{A + \varepsilon_1 A + a_1(3x_1^2 + y_1^2)}}} - 2a_2 x_0 x_1 \quad + a_4(x_4^2 + y_4^2)(5x_4^2 + y_4^2) \\
& + \lambda_0 B_1(3x_1^2 + y_1^2) - 2\lambda_0 B_2 x_0 x_1 \quad + (a_5 + a_6)x_0^2 \\
& + \varepsilon_3 \underline{\underline{\underline{A}}} \quad + \varepsilon_1 B_1(3x_1^2 + y_1^2) - \lambda_0 B_4(x_4^2 + y_4^2)(5x_4^2 + y_4^2) \\
& \quad + \varepsilon_3 \underline{\underline{\underline{A}}} \quad + \lambda_0(B_5 + B_6)x_0^2 \\
& \quad - 2\varepsilon_1 B_2 x_0 x_1 \\
& + \varepsilon_3 B_1(3x_1^2 + y_1^2) \\
& + \varepsilon_4 \underline{\underline{\underline{A}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2a_1 x_1 y_1 \quad - 2a_3 x_0 y_1 \quad + 4a_4 x_1 y_1(x_4^2 + y_4^2) \quad \underline{\underline{\underline{Ax_1}}} \quad \underline{\underline{\underline{Bx_0 + B_4x_1(x_4^2 + y_4^2)}}} \\
& + 2\lambda_0 B_1 x_1 y_1 \quad - 2\lambda_0 B_3 x_0 y_1 \quad + 4\lambda_0 B_4 x_1 y_1(x_4^2 + y_4^2) \\
& + 2\varepsilon_1 B_1 x_1 y_1 \quad - 2B_3 \varepsilon_1 x_0 y_1 \\
& \quad + 2B_4 \varepsilon_3 x_1 y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2a_1 x_1 y_1 \quad - (a_2 - a_3)x_0 y_1 \quad + 4a_4 x_1 y_1(x_4^2 + y_4^2) \\
& + 2\lambda_0 B_1 x_1 y_1 \quad - \lambda_0(B_2 - B_3)x_0 y_1 + 4\lambda_0 B_4 x_1 y_1(x_4^2 + y_4^2) \\
& + 2\varepsilon_1 B_1 x_1 y_1 \quad - \varepsilon_1(B_2 - B_3)x_0 y_1 \\
& \quad + 2\varepsilon_3 B_1 x_1 y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1+a\hat{z}) + \lambda_0 \underline{\underline{\underline{A + \varepsilon_1 A + a_1(x_1^2 + 3y_1^2)}}} - (a_2 - a_3)x_0 x_1 \quad + a_4(x_4^2 + y_4^2)(x_4^2 + 5y_4^2) \\
& + \lambda_0 B_1(x_1^2 + 3y_1^2) - \lambda_0(B_2 - B_3)x_0 x_1 + a_5 x_0^2 \\
& + \varepsilon_3 \underline{\underline{\underline{A}}} \quad + \varepsilon_1 B_1(x_1^2 + 3y_1^2) + B_4 \lambda_0(x_4^2 + y_4^2)(x_4^2 + 5y_4^2) \\
& \quad + \varepsilon_3 \underline{\underline{\underline{A}}} \quad + B_3 \lambda_0 x_0^2 \\
& \quad - \varepsilon_1(B_2 - B_3)x_0 x_1 \\
& + \varepsilon_3 B_1(x_1^2 + 3y_1^2) \\
& + \varepsilon_4 \underline{\underline{\underline{A}}}
\end{aligned}$$

== 0.

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+a\hat{z})^2}{R_2} x_1 - \frac{b\hat{z}(1+a\hat{z})}{R_3} x_0 + 4 \left\{ \frac{a_1(1+a\hat{z})}{R_5} + \frac{(1+a\hat{z})^4}{8R_2^3} \right\} x_1(x_1^2 + y_1^2) \\
& - \lambda_0 \frac{A^2}{\mu_3} \frac{x_1}{\mu_3} \quad + \lambda_0 \frac{AB}{\mu_3} \frac{x_0}{\mu_3} \quad - 4\lambda_0 \left(\frac{AB}{\mu_3} + \frac{A^4}{8\mu_3^2} \right) x_1(x_1^2 + y_1^2) \\
& \quad - \varepsilon_4 \frac{A^2}{\mu_3} \frac{x_1}{\mu_3} \quad + \varepsilon_1 \frac{AB}{\mu_3} \frac{x_0}{\mu_3} \\
& \quad - \varepsilon_2 \frac{A^2}{\mu_3} x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+a\hat{z})^2}{R_2} y_1 - \frac{A^2}{\varepsilon_1} \frac{y_1}{\mu_3} \quad + 4 \left\{ \frac{a_1(1+a\hat{z})}{R_5} + \frac{(1+a\hat{z})^4}{8R_2^3} \right\} y_1(x_4^2 + y_4^2) \\
& - \lambda_0 \frac{A^2}{\mu_3} \frac{y_1}{\mu_3} \quad - 4\lambda_0 \left\{ \frac{AB}{\mu_3} + \frac{A^4}{8\mu_3^2} \right\} y_1(x_4^2 + y_4^2) \\
& \quad - \varepsilon_4 \frac{A^2}{\mu_3} y_1
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\underline{-\frac{A^2}{2\mu_2}(x_4^2 + y_4^2)}}}$$

μ_3

Les termes écrits suffisent à pousser le développement jusqu'au 6^e ordre, sans omission.

En écrivant que ce terme est identiquement nul, on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 = & \frac{1}{A^2} \left\{ B_1 \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\hat{z}}{A} \right) - A \left(a_4 - B_4 \frac{1+a\hat{z}}{A} \right) \right\} (x_1^2 + y_1^2)^2 \\ & + \frac{1}{A} \left\{ B_5 \frac{1+a\hat{z}}{A} - a_5 \right\} x_0^2 \\ & - \frac{1}{A} \left\{ \left(B_6 \frac{1+a\hat{z}}{A} - a_6 \right) + B \frac{1+a\hat{z}}{\mu_2} \left(\frac{b\hat{z}}{R_2} + \frac{B}{\mu_2} \right) \right\} \frac{x_0^2 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \\ & + \frac{\mathcal{BC}}{A} \frac{1}{\mu_2} \frac{x_0^2 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 = & \frac{4}{\mu_2} \left\{ \frac{a_1(1+a\hat{z})}{R_2} + \frac{(1+a\hat{z})^4}{8R_2^3} + \frac{B_1(1+a\hat{z})}{\mu_2} + \frac{A^3(1+a\hat{z})}{8\mu_2^3} \right\} (x_1^2 + y_1^2)^2 \\ & - A \left\{ \frac{3}{2\mu_2^3} + \frac{2B_4}{A^3\mu_2} \right\} (x_1^2 + y_1^2)^2 \\ & - 5 \frac{B_1}{A^2} \left\{ a_1 - B_1 \frac{1+a\hat{z}}{A} \right\} (x_1^2 + y_1^2)^2 \\ & - \frac{5}{A} \left\{ a_4 - B_4 \frac{1+a\hat{z}}{A} \right\} (x_1^2 + y_1^2)^2 \\ & + A^2 \frac{1+a\hat{z}}{\mu_2^3} \left(\frac{1+a\hat{z}}{R_2} + \frac{A}{\mu_2} \right) (x_1^2 + y_1^2)^2 \\ & + \frac{1}{A} \left\{ B_5 \frac{1+a\hat{z}}{A} - a_5 \right\} x_0^2 \\ & + \frac{1}{A} \left\{ \left(B_6 \frac{1+a\hat{z}}{A} - a_6 \right) + B \frac{1+a\hat{z}}{\mu_2} \left(\frac{b\hat{z}}{R_2} + \frac{B}{\mu_2} \right) \right\} x_0^2 \frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \\ & + \frac{\mathcal{BC}}{A} \frac{1}{\mu_2} x_0^2 \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}.\end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs de λ_0 , ε_1 , ε_2 et ε_3 précédemment calculées, il vient pour les équations de la caustique :

1^{re} NAPPE.

2 ^o ordre	4 ^o ordre	5 ^o ordre
↓	↓	↓

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{b}{\Lambda} x_0 + \frac{\Lambda C - B_1 \mu_1}{2 \Lambda^2 \mu_1} x_0 (x_1^2 + y_1^2) + \left[\left(a_6 - B_6 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) - \frac{B}{\Lambda} \left\{ (a_1 - a_3) - (B_1 - B_3) \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right\} \right] x_0^2 x_1 \\
 &\quad - \left[B \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{b\delta}{R_1} + \frac{B}{\mu_2} \right) - \left(a_6 - B_6 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) - \frac{BC}{\Lambda \mu_1} \right] x_0^2 x_1 \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \\
 &\hspace{15em} \text{au 6^e ordre près,} \\
 Y &= - \left[B \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{b\delta}{R_1} + \frac{B}{\mu_2} \right) - \left(a_6 - B_6 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) - \frac{BC}{\Lambda \mu_1} \right] x_0^2 y_1 \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \\
 &\hspace{15em} \text{au 6^e ordre près,} \\
 Z &= d - \frac{1+a\delta}{\Lambda} \mu_1 + \frac{\mu_1}{2 \Lambda^2} (x_1^2 + y_1^2) - \frac{B}{\Lambda^2} x_1 x_0 + \left[\frac{a_1(1+a\delta)}{R_1} + \frac{(1+a\delta)^4}{8 R_1^3} + \frac{B_1(1+a\delta)}{2 \mu_1} + \frac{\Lambda^3(1+a\delta)}{8 \mu_1^3} + \frac{\Lambda a_1}{2 \mu_1} \right. \\
 &\quad \left. + \mu_1 \frac{B_1}{\Lambda^2} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) - \frac{\mu_1}{\Lambda} \left(a_4 - B_4 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) \right] (x_1^2 + y_1^2)^2 \\
 &\quad - \left[\frac{B}{\Lambda} (1+a\delta) \left(\frac{b\delta}{R_1} + \frac{B}{\mu_1} \right) - \frac{\mu_1}{\Lambda} \left(a_6 - B_6 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) - \frac{BC}{\Lambda \mu_1} \right] x_0^2 \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \\
 &\quad + \left[\frac{b^2 \delta^2}{2 R_1^3} + \frac{(1+a\delta) B^2}{2 \Lambda \mu_1} - \frac{\mu_1}{\Lambda} \left(a_3 - B_3 \frac{1+a\delta}{\Lambda} \right) \right] x_0^2 \\
 &\hspace{15em} \text{au 5^e ordre près.}
 \end{aligned}$$

2° NAPPE.

$$\begin{aligned}
X = & \frac{b}{A} x_0 + \frac{A}{A\mu_2} x_1(x_1^2 + y_1^2) + \left\{ \frac{B}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) - \left(a_3 - B_3 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right. \\
& - A \frac{B}{A^2\mu_2} \left\{ x_0(x_1^2 + y_1^2) - \frac{B+C}{A\mu_2} x_0 x_1^2 \right. \\
& + x_1(x_1^2 + y_1^2) \left\{ \frac{4A}{\mu_2} \left[\frac{a(1+a\delta)}{R_2} + \frac{(1+a\delta)^4}{8R_2^3} + \frac{B_1(1+a\delta)}{\mu_2} + \frac{3A^3(1+a\delta)}{2\mu_2^3} + \frac{A^2(1+a\delta)^2}{4R_2\mu_2^2} \right] \right. \\
& \left. \left. - A \left[\frac{3A}{2\mu_2^3} + \frac{B_1}{A^2\mu_2} \right] + 4 \left[\frac{B_1}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) - \left(a_4 - B_4 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right] \right\} \right\} \\
& + x_0^2 x_1 \left\{ \left(a_0 - B_0 \frac{1+a\delta}{A} \right) - \frac{B}{A} \left[(a_3 - a_4) - (B_3 - B_4) \frac{1+a\delta}{A} \right] + \frac{B}{A^2\mu_2} (B+C) \right\} \\
& + x_0^2 \frac{x_1^3}{x_1^2 + y_1^2} \left\{ B \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{b\delta}{R_2} + \frac{B}{\mu_2} \right) - \left(a_0 - B_0 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} \\
& + x_0^2 \frac{x_1 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \frac{B+C}{A} \frac{1}{A\mu_2}
\end{aligned}$$

au 6° ordre près,

$$\begin{aligned}
Y = & \frac{A}{A\mu_2} y_1(x_1^2 + y_1^2) - \frac{B+C}{A\mu_2} x_0 x_1 y_1 \\
& + y_1(x_1^2 + y_1^2) \left\{ \frac{4A}{\mu_2} \left[\frac{a(1+a\delta)}{R_2} + \frac{(1+a\delta)^4}{8R_2^3} + \frac{B_1(1+a\delta)}{\mu_2} + \frac{3A^3(1+a\delta)}{8\mu_2^3} + \frac{A^2(1+a\delta)^2}{4\mu_2^2 R_2} \right] \right. \\
& \left. - A \left[\frac{3A}{2\mu_2^3} + \frac{B_1}{A^2\mu_2} \right] + 4 \left[\frac{B_1}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) - \left(a_4 - B_4 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right] \right\} \\
& + x_0^2 \frac{x_1^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \left\{ B \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{b\delta}{R_2} + \frac{B}{\mu_2} \right) - \left(a_0 - B_0 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} \\
& + x_0^2 \frac{y_1^3}{x_1^2 + y_1^2} \frac{B+C}{A} \frac{1}{A\mu_2}
\end{aligned}$$

au 6° ordre près,

$$\begin{aligned}
Z = & d - \frac{1+a\delta}{A} \mu_2 + \frac{3}{2} \frac{A}{A^2} (x_1^2 + y_1^2) - \frac{2B+C}{A^2} x_1 x_0 + \left\{ \frac{b^2\delta^2}{2R_2} + \frac{B^2(1+a\delta)}{2A\mu_2} - \frac{\mu_2}{A} \left(a_3 - B_3 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} x_0^2 \\
& + \left\{ \frac{5a_1(1+a\delta)}{R_2} + \frac{5(1+a)^4}{8R_2^3} + \frac{5B_1(1+a\delta)}{\mu_2} + \frac{13A^3(1+a\delta)}{8\mu_2^3} + \frac{A^2(1+a\delta)^2}{\mu_2^2 R_2} \right. \\
& + \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) \left(\frac{A}{2\mu_2} + \frac{5B_1\mu_2}{A^2} \right) - \frac{5\mu_2}{A} \left(a_4 - B_4 \frac{1+a\delta}{A} \right) - 2A \left(\frac{1}{\mu_2^2} + \frac{B_1}{A^2} \right) \left\{ (x_1^2 + y_1^2)^2 \right. \\
& + \frac{\mu_2}{A} \left\{ B \frac{1+a\delta}{\mu_2} \left(\frac{b\delta}{R_2} + \frac{B}{\mu_2} \right) - \left(a_0 - B_0 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right\} x_0^2 \frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \\
& \left. + \frac{B+C}{A} \frac{1}{A^2} x_0^2 \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \right\}
\end{aligned}$$

au 5° ordre près.

Prenons comme nouvelle origine le point de coordonnées :

$$x = \frac{b}{\Lambda} x_0, \quad y = 0,$$

$$z = d - \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \mu_2 + \left[\frac{b^2 \hat{z}^2}{2R_2} + \frac{B^2(1+a\hat{z})}{2\Lambda \mu_2} - \frac{\mu_2}{\Lambda} \left(a - B \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \frac{B^2}{2\Lambda^2 \mu_2} \right] x_0^2$$

et comme axe des z la droite :

$$x = \frac{\Lambda C - B \mu_2}{2\Lambda^2 \mu_2} x_0 (x_1^2 + y_1^2),$$

$$z = \frac{\mu_2}{2\Lambda^2} (x_1^2 + y_1^2).$$

Cet axe fait avec le précédent un angle φ tel que :

$$\begin{cases} \lg \varphi = \frac{\Lambda C - B \mu_2}{\mu_2 \mu_2} x_0, \\ \sin \varphi = \frac{\Lambda C - B \mu_2}{\mu_2 \mu_2} x_0 & \text{au 6° ordre près,} \\ \cos \varphi = 1 & \text{au 4° ordre près.} \end{cases}$$

Si, d'autre part, l'on pose :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \theta + \frac{B}{\mu_2} x_0, \\ y_1 = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

les équations de la première nappe de caustique deviennent après simplification :

$$\begin{cases} X = -\Delta_1 \rho \cos^3 \theta & \text{au 6° ordre près,} \\ Y = +\Delta_1 \rho \sin^3 \theta & \text{au 6° ordre près,} \\ Z = \frac{\mu_2}{2\Lambda^2} \rho^2 + \Delta_2 \rho^4 - \Delta_1 \sin^2 \theta & \text{au 5° ordre près,} \end{cases}$$

avec

$$\Delta_1 = \left\{ \left(a - B \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \frac{B(1+a\hat{z})}{\mu_2} \left(\frac{B}{\mu_2} + \frac{b\hat{z}}{R_2} \right) + \frac{B^2}{\mu_2} \frac{1}{\Lambda \mu_2} \right\} x_0^2 \quad (4^\circ \text{ ordre}),$$

$$\Delta_2 = \left\{ \frac{a_1(1+a\hat{z})}{R_2} + \frac{(1+a\hat{z})^4}{8R_2^3} + \frac{B_1(1+a\hat{z})}{2\mu_2} \right. \\ \left. + \frac{\Lambda^3(1+a\hat{z})}{8\mu_2^3} + \frac{\Lambda a_1}{2\mu_2} + \mu_2 \frac{B_1}{\Lambda^2} \left(a - B \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) - \mu_2 \frac{1}{\Lambda} \left(a - B \frac{1+a\hat{z}}{\Lambda} \right) \right\} \\ \text{(fini).}$$

En faisant

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \theta + \frac{C}{A} x_0, \\ y_1 = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

les équations de la deuxième nappe s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{Ab}{A\mu_2} \rho^3 \cos \theta + \Delta_1 \rho \sin^2 \theta \cos \theta + \Delta_3 \rho^2 \cos^2 \theta + \Delta_4 \rho^3 \cos \theta && \text{au 6° ordre près,} \\ Y &= \frac{Ab}{A\mu_2} \rho^3 \sin \theta - \Delta_1 \rho \sin \theta \cos^2 \theta + \Delta_3 \rho^2 \sin \theta \cos \theta + \Delta_4 \rho^3 \sin \theta && \text{au 6° ordre près,} \\ Z &= \frac{3}{2} \frac{Ab}{A^2} \rho^3 - \frac{\mu_3}{A} \Delta_1 \cos^3 \theta + 2 \frac{\mu_3}{A} \Delta_3 \rho \cos \theta + \Delta_5 \rho^2 && \text{au 5° ordre près,} \end{aligned} \right.$$

avec

$$\Delta_3 = - \frac{B-C}{A\mu_2} x_0 \quad (3^{\circ} \text{ ordre}),$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \frac{4A}{\mu_2} \left[\frac{a_1(1+a\delta)}{R_2} + \frac{(1+a\delta)^4}{8R_2^3} + \frac{B_1(1+a\delta)}{\mu_2} + \frac{3A^3(1+a\delta)}{8\mu_2^3} + \frac{A^2(1+a\delta)^3}{4R_2\mu_2^2} \right] \\ &\quad - Ab \left[\frac{3A}{2\mu_2^3} + \frac{B_1}{A^2\mu_2} \right] + 4 \left[\frac{B_1}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) - \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) \right] \quad (\text{fini}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \frac{5a_1(1+a\delta)}{R_2} + \frac{5(1+a\delta)^4}{8R_2^3} + \frac{5B_1(1+a\delta)}{\mu_2} + \frac{13A^3(1+a\delta)}{8\mu_2^3} + \frac{A^2(1+a\delta)^3}{\mu_2^2 R_2} \\ &\quad + \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) \left(\frac{A}{2\mu_2} + \frac{5B_1\mu_2}{A^2} \right) - \frac{5\mu_2}{A} \left(a_1 - B_1 \frac{1+a\delta}{A} \right) - 2Ab \left(\frac{1}{\mu_2^2} + \frac{B_1}{A^3} \right) \quad (\text{fini}). \end{aligned}$$

CHAPITRE VII.

Étude expérimentale de la caustique d'une lentille.

La source de lumière utilisée était un petit trou éclairé par la flamme non lumineuse d'un bec Méker que l'on colorait avec du chlorate de sodium. Le système optique était disposé sur une plate-forme mobile placée sur un banc d'optique; la distance entre la source et le système était de 5 mètres. Ce système pouvait tourner autour d'un axe vertical, il était muni d'une alidade se déplaçant sur un cercle gradué. On pouvait de la sorte déterminer les inclinaisons de l'axe du système sur la direction moyenne du faisceau incident. Il a été expérimenté avec des inclinaisons variant de 5° entre 0° et 35° .

D'autre part, une deuxième plate-forme était située en arrière du système. Elle pouvait glisser le long du banc et elle supportait un chassis muni d'une plaque sensible normale à la direction moyenne du faisceau initial. Pour chaque position de l'écran, on obtenait un cliché d'une ligne de niveau de la caustique dont la cote était déterminée immédiatement. Ces cotes sont complées ici en millimètres à partir du plan image de Gauss. Les meilleurs résultats furent obtenus avec des plaques lentes et des poses variant de 4 à 8 minutes.

La lentille utilisée est une lentille plan-convexe avec $R_1 = 61$ mill. $4 \frac{1}{10}$ de millimètre près et $R_2 = \infty$. La détermination de R_1 a été faite au sphéromètre, ainsi que celle de l'épaisseur; on a trouvé $d = 31$ millimètres $\frac{1}{10}$ de millimètre près.

Inclinaison : 0°.

Inclinaison : 5°.

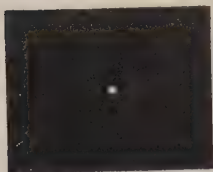
Inclinaison : 10°.

Inclinaison : 15°.

Cotes : 0



5



0



5



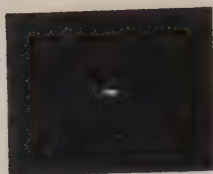
— 10



15



4.7



8



— 15



25



8



11



— 25



35



11



15



— 35



45



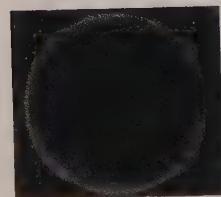
16



20



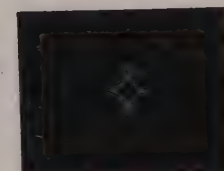
— 45



23



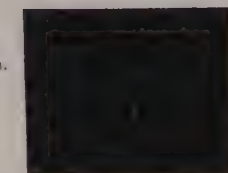
25



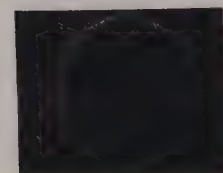
33



35



45



Inclinaison : 20° .

Inclinaison : 25° .

Inclinaison : 30° .

Inclinaison : 35° .

Cotes : 3^{mm.}



3^{mm.}



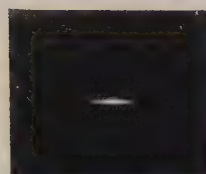
10^{mm.}



7^{mm.}



— 8^{mm.}



8^{mm.}



15^{mm.}



14^{mm.}



— 13^{mm.}



14^{mm.}



20^{mm.}



22^{mm.}



— 19^{mm.}



20^{mm.}



25^{mm.}



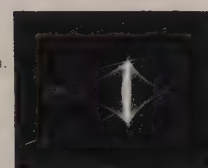
31^{mm.}



— 26^{mm.}



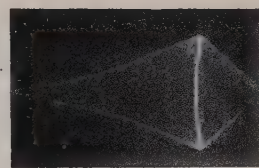
27^{mm.}



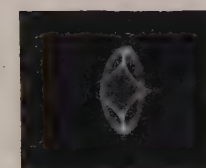
30^{mm.}



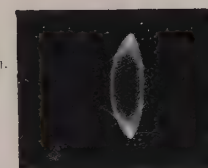
41^{mm.}



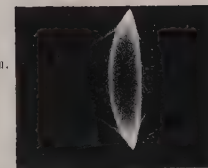
— 33^{mm.}



35^{mm.}



35^{mm.}



— 41^{mm.}



45^{mm.}



45^{mm.}



Détermination de l'indice du verre constituant la lentille.

Deux méthodes ont été employées :

1° Méthode focométrique.

Soit μ_1 l'indice du verre pour la raie D, F_1 la distance focale de la lentille correspondant aux rayons centraux et à la radiation D.

On a :

$$\mu_1 - 1 = \frac{R_1}{F_1}.$$

La précision de la détermination est donnée par :

$$\frac{\partial(\mu_1 - 1)}{\mu_1 - 1} = \frac{\partial R_1}{R_1} + \frac{\partial F_1}{F_1}.$$

Le focomètre de Laurent dont nous disposions, permet de faire la mise au point à moins de $\frac{1}{2}$ millimètre près. En disposant la face plane de la lentille sur le plan réfléchissant de l'appareil, la distance du zéro de la graduation au sommet de la lentille donne F_1 , puisque le premier plan principal coïncide avec ce sommet. On a trouvé $F_1 = 120$ millimètres.

On a donc :

$$\frac{\partial(\mu_1 - 1)}{\mu_1 - 1} = \frac{1}{614} + \frac{1}{240} < \frac{1}{150}$$

et

$$\begin{aligned}\mu_1 - 1 &= 0.511, \\ \mu_1 &= 1.511\end{aligned}$$

à quatre unités près du dernier ordre.

2° Recherche d'un liquide d'égal indice.

La benzine et le sulfure de carbone se mélangent bien et permettent de réaliser un liquide dont l'indice pour la raie jaune varie de 1.501 à 1.629. Il est donc possible d'obtenir un mélange possédant l'indice du verre étudié.

Une cuve à faces parallèles et remplie de benzine était disposée entre un collima-

teur dont on éclairait la fente avec la lumière jaune et une lunette réglée pour l'infini. Celle-ci était amenée dans une position telle que l'image de la fente venait se former sur la croisée des fils du réticule. On introduisait la lentille dans la cuve de façon que le faisceau lumineux la traverse dans une région marginale et normalement à la face courbe. On observait une déformation de l'image en même temps qu'un déplacement latéral.

On peut assimiler le système verre-liquide dans la région traversée à un système de deux prismes d'angles égaux et de sens contraires. Si A est l'angle de ces prismes, μ_1 l'indice du verre pour la raie D et μ_1' l'indice du liquide, la déviation est, en première approximation :

$$(\mu_1 - \mu_1')A.$$

Avec la lentille étudiée, A pouvait varier de 0° à près de 60° . La région utilisée étant marginale, on peut considérer A comme voisin de 60° et à une variation d'indice de 0.001 correspond une déviation supérieure à $3'$. Cette déviation était facilement appréciable, puisque le goniomètre employé permettait de mesurer la minute.

On ajoutait du sulfure de carbone goutte à goutte et, après complète diffusion, on observait l'image. La déviation de celle-ci diminuait en même temps que sa netteté augmentait.

D'autre part, à l'aide du réfractomètre de Pulfrich, on suivait facilement la variation de l'indice du mélange liquide. On trouva ainsi que les liquides d'indice 1.511 et 1.513 étaient ceux pour lesquels la croisée des fils du réticule semblait passer d'un bord de l'image de la fente à l'autre. On peut donc conclure que l'indice cherché est 1.512 à $\frac{1}{1000}$ près.

Plusieurs expériences effectuées à quelques minutes d'intervalle nous ont montré que l'évaporation n'introduisait que des variations inférieures au $\frac{1}{1000}$.

La précision du $\frac{1}{1000}$ dans la détermination de l'indice suffit largement, comme nous le verrons dans la suite, pour les vérifications expérimentales que nous nous proposons.

CHAPITRE VIII.

Comparaison entre les résultats observés et calculés.

Appliquons les résultats obtenus dans les chapitres IV et VI au cas particulier de la lentille plan-convexe utilisée précédemment.

Les paramètres caractérisant le système optique sont :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1, & \mu_1 &= 1.512, & \mu_2 &= 1 \\ R_1 &= 6^{\text{cm}} 14 & R_2 &= \infty \\ z_0 &= -500^{\text{cm}} & d &= 3^{\text{cm}} 1. \end{aligned}$$

Ces valeurs donnent :

$$\begin{aligned} a &= -0,081 \ 2 \\ b &= +0,002 \\ b_1 &= -0,000 \ 745 \\ b_2 &= -0,000 \ 018 \ 3 & 1 + a\bar{z} &= 0,833 \ 5 \\ b_3 &= -0,000 \ 000 \ 325 \\ b_4 &= -0,000 \ 010 \ 1 \\ b_5 &= -0,000 \ 000 \ 110 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} a_1 &= +0,002 \ 47 \\ a_2 &= -0,000 \ 127 \\ a_3 &= -0,000 \ 101 \\ a_4 &= -0,000 \ 157 \\ a_5 &= -0,000 \ 000 \ 37 \\ a_6 &= -0,000 \ 000 \ 291 \end{aligned}$$

et

$$A = a = -0,0812$$

$$B = b = +0,002$$

$$\frac{1 + a\delta}{A} = -10,26$$

$$B_1 = b_1 = -0,000\ 745$$

$$B_2 = b_2 = -0,000\ 018\ 3$$

$$B_3 = b_3 = -0,000\ 000\ 325$$

$$B_4 = b_4 = -0,000\ 010\ 1$$

$$B_5 = b_5 = -0,000\ 000\ 11$$

$$B_6 = 0$$

On déduit de là :

$$A = -0,001\ 374$$

$$B = -0,000\ 006\ 11$$

$$C = -0,000\ 005\ 94$$

$$\frac{BC}{A} = -0,000\ 000\ 026$$

$$\frac{B-C}{A} = +0,000\ 002\ 09$$

et pour les coefficients qui figurent dans les équations de la caustique :

$$\text{(fini)} \quad \frac{A}{A\rho_2} = +0,016\ 92 \quad \Delta_1 = -0,000\ 003\ 30\ x_0^2 \quad (4^\circ \text{ ordre})$$

$$\Delta_2 = -0,003\ 096 \quad (\text{fini})$$

$$\text{(fini)} \quad \frac{A}{2A^2} = -0,1042 \quad \Delta_3 = -0,000\ 002\ 09\ x_0 \quad (3^\circ \text{ ordre})$$

$$\Delta_4 = +0,000\ 79 \quad (\text{fini})$$

$$\text{(fini)} \quad \frac{3A}{2A^3} = -0,3126 \quad \Delta_5 = -0,010\ 195 \quad (\text{fini})$$

CAS D'UNE INCLINAISON DE 5°.

L'expérience donne très sensiblement comme lignes de niveau un point et une circonférence. Par suite, la caustique se réduit pour des inclinaisons de cet ordre à une droite et à une surface de révolution admettant comme axe la droite précédente.

Afin d'effectuer des comparaisons quantitatives, utilisons les résultats de première approximation obtenus au chapitre IV. Les équations de la deuxième nappe deviennent, en renversant la direction positive de l'axe des z :

$$\begin{cases} X = 0,01692\ \rho^3 \cos \theta \\ Y = 0,01692\ \rho^3 \sin \theta \\ Z = 0,3126\ \rho^3 \end{cases}$$

Déterminons les rayons des circonférences qui correspondent aux lignes de niveau de la deuxième nappe de caustique et comparons les valeurs calculées aux valeurs observées. On obtient :

Cotes en millimètres.	ρ^2	ρ	ρ^3	Rayon calculé en millimètres.	Rayon observé.
5	1.6	1.25	2	0.34	0.3
15	4.7	2.16	10.15	1.72	1.6
25	7.8	2.80	21.8	3.69	3.7
35	10.9	3.3	36	6.1	6.7
45	14	3.75	52.5	8.9	10.7

L'accord entre le calcul et l'expérience est donc très satisfaisant. Les divergences n'apparaissent, ainsi qu'on pouvait s'y attendre, qu'à partir des cotes de l'ordre de 40^{mm}. Il est à noter que pour ces cotes la première nappe disparaît; cela tient à ce que les rayons correspondants sont arrêtés par la monture du système.

CAS D'UNE INCLINAISON DE 10°.

L'expérience montre que la symétrie de révolution n'existe plus; par suite, la première approximation du chapitre IV n'est pas valable. Utilisons les résultats de deuxième approximation avec $x_0 = 88$, ce qui correspond à un faisceau incident dont le rayon moyen est incliné de 10° sur l'axe de la lentille.

Les équations de la première nappe de caustique deviennent :

$$\begin{cases} X = +0,0255\rho \cos^3 \theta, \\ Y = -0,0255\rho \sin^3 \theta, \\ Z = +0,104\rho^2 + 0,003096\rho^4 + 0,0255 \sin^2 \theta, \end{cases}$$

et celles de la deuxième nappe :

$$\begin{cases} X = +0,01692\rho^2 \cos \theta - 0,0255\rho \sin^2 \theta \cos \theta - 0,000184\rho^2 \cos^2 \theta + 0,00079\rho^5 \cos \theta, \\ Y = +0,01692\rho^2 \sin \theta + 0,0255\rho \sin \theta \cos^2 \theta - 0,000184\rho^2 \sin \theta \cos \theta + 0,00079\rho^5 \sin \theta, \\ Z = +0,3126\rho^2 + 0,314 \cos^2 \theta - 0,00226\rho \cos \theta + 0,010195\rho^4. \end{cases}$$

(La direction positive de l'axe des z a été renversée).

Étant donné que ces équations sont exactes, seulement au 6^e ordre près en ce qui concerne les deux premières et au 5^e ordre près en ce qui concerne la dernière, il est légitime de les réduire à :

$$\begin{cases} X = + 0.0255 \rho \cos^3 \theta, \\ Y = - 0.0255 \rho \sin^3 \theta, \\ Z = + 0.104 \rho^3 + 0.0255 \sin^2 \theta \end{cases}$$

pour le premier système, et à :

$$\begin{cases} X = + 0.01692 \rho^3 \cos \theta - 0.0255 \rho \sin^2 \theta \cos \theta \\ Y = + 0.01692 \rho^3 \sin \theta + 0.0255 \rho \sin \theta \cos^2 \theta \\ Z = + 0.3126 \rho^3 + 0.314 \cos^2 \theta \end{cases}$$

pour le dernier système.

Les termes négligés déviennent, en effet, du fait des valeurs particulières prises par les coefficients, d'un ordre supérieur à ceux que nous avons négligés dans l'établissement des équations générales; il n'y a, par conséquent, pas lieu de les conserver. Par exemple, $\Delta_3 < \Delta_1$, d'où $\Delta_2 \rho^4$ est au moins du 8^e ordre, et il n'y a pas de raison de le considérer dans le cas actuel.

Si, d'autre part, nous adoptons comme unité de longueur une longueur égale à 0^{cm}0255, les équations précédentes s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} X = + \rho \cos^3 \theta \\ Y = - \rho \sin^3 \theta \\ Z = + 4.08 \rho^3 + \sin^2 \theta \end{cases}$$

pour la première nappe de caustique, et :

$$\begin{cases} X = + 0.66 \rho^3 \cos \theta - \rho \sin^2 \theta \cos \theta \\ Y = + 0.66 \rho^3 \sin \theta + \rho \sin \theta \cos^2 \theta \\ Z = + 12.26 \rho^3 + 12.31 \cos^2 \theta \end{cases}$$

pour la deuxième nappe de caustique.

Etude de la première nappe de caustique.

Les plans $Y=0$ et $X=0$ sont des *plans de symétrie*. Cela résulte de ce que, pour un changement de signe de θ , X et Z conservent la même valeur alors que Y change de signe et de ce que, pour θ et $\pi - \theta$, Y et Z conservent la même valeur alors que X change de signe.

Section $Y = 0$.

Cette section correspond aux valeurs :

$$\begin{cases} \rho = 0, & \text{pour laquelle } X = 0, Z = \sin^2 \theta \\ \sin \theta = 0, & \text{d'où il résulte :} \end{cases} \quad (\text{portion de droite D du graphique ci-dessous}),$$

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \text{ou } \pi \end{cases} \quad \cos \theta = \pm 1 \quad \begin{cases} X = \pm \rho, \\ Z = +4.08 \rho^2 \end{cases} \quad (\text{parabole } P_1).$$

Section $X = 0$.

Cette section correspond aux valeurs :

$$\begin{cases} \rho = 0, & \text{pour laquelle } Y = 0, Z = \sin^2 \theta \text{ (portion de droite D),} \\ \cos \theta = 0, & \text{d'où il résulte :} \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \text{ou } \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \sin \theta = \pm 1 \quad \begin{cases} Y = \mp \rho, \\ Z = 4.08 \rho^2 + 1 \end{cases} \quad (\text{parabole } P_2).$$

Les graphiques qui suivent représentent l'ensemble de ces sections.

Coefficient angulaire des tangentes aux lignes de niveau.

Les lignes de niveau sont déterminées par la condition :

$$Z = \text{Constante},$$

d'où :

$$8.16 \rho d\rho + \sin 2\theta d\theta = 0$$

et

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\sin 2\theta}{8.16 \rho}.$$

D'autre part :

$$\frac{dX}{d\theta} = -\left\{ 1.5\rho + \frac{\cos^2 \theta}{8.16\rho} \right\} \cos \theta \sin 2\theta,$$

$$\frac{dY}{d\theta} = -\left\{ 1.5\rho - \frac{\sin^2 \theta}{8.16\rho} \right\} \sin \theta \sin 2\theta.$$

On a, par suite, le long d'une ligne de niveau :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{12.24 \rho^2 - \sin^2 \theta}{12.24 \rho^2 + \cos^2 \theta} \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

La tangente aux lignes de niveau est parallèle à Oy pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire pour les points situés sur la parabole P_2 . Ces points sont des points de rebroussement, car on a en même temps $\frac{dX}{d\theta} = 0$ et $\frac{dY}{d\theta} = 0$. La parabole P_2 est donc un lieu de points de rebroussement à tangente parallèle à Oy.

Le résultat précédent est en défaut dans le cas particulier où :

$$\rho = \frac{\sin^2 \theta}{12.24}.$$

Dans ce cas, on a :

$$\frac{dY}{dX} = 0, \quad X = 0, \quad Y = \pm \frac{1}{3.5}, \quad Z = 1.33,$$

et pour ce point la tangente à la courbe est parallèle à Ox.

La tangente aux lignes de niveau est parallèle à Ox pour les points où :

$$\sin \theta = 0,$$

c'est-à-dire pour les points de la parabole P_1 . Cette parabole, pour la même raison que plus haut, est un lieu de points de rebroussement à tangente parallèle à Ox.

Et aussi lorsque :

$$\rho^2 = \frac{\sin^2 \theta}{12.24},$$

condition remplie par les points de la courbe :

$$\begin{cases} X = \pm \frac{1}{3.5} \sin \theta \cos^3 \theta, \\ Y = \mp \frac{1}{3.5} \sin^4 \theta, \\ Z = 1.33 \sin^2 \theta. \end{cases}$$

qui satisfait, par suite, à la condition :

$$0 \leq Z \leq 1.33.$$

La droite D est un lieu de points doubles, ainsi que l'indique la symétrie de la surface ou la valeur particulière que prend $\frac{dY}{dX} = -\operatorname{tg}^3 \theta$.

Section $y=0$

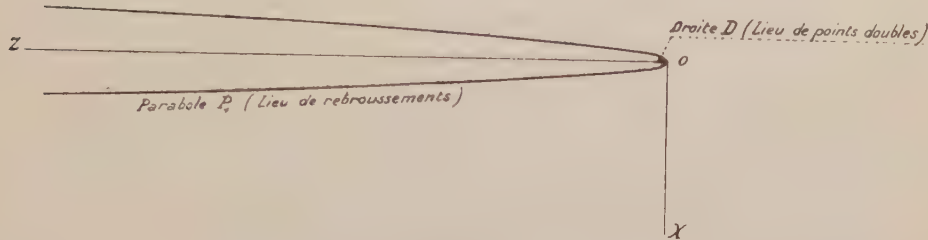


FIG. 13.

Section $X=0$

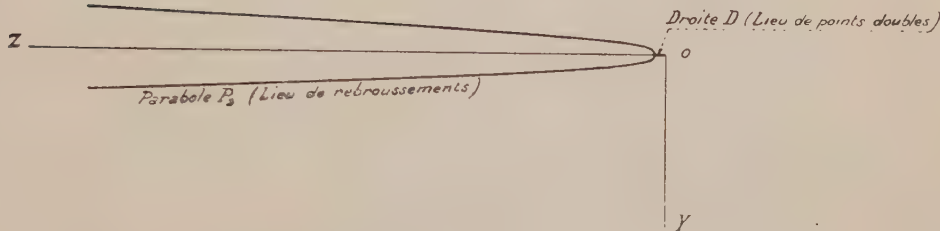


FIG. 14.

Etude de la deuxième nappe de caustique.

Comme pour la première nappe, les plans $Y=0$ et $X=0$ sont des plans de symétrie.

Section $Y=0$.

Cette section correspond au système de valeurs :

$$\begin{cases} \rho = 0, & \text{pour laquelle } X=0, Z=12.31 \cos^2 \theta \\ & (\text{portion de la droite D' du graphique}), \\ \sin \theta = 0, & \text{d'où il résulte :} \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \text{ou } \pi, \end{cases} \quad X = \pm 0.66 \rho^3, \quad Z = 12.26 \rho^3 + 12.31.$$

Cette dernière courbe est une parabole semi-cubique d'équation :

$$\left(\frac{X}{0.66} \right)^2 = \left(\frac{Z - 12.31}{12.26} \right)^3 \quad (\text{courbe } P_1' \text{ du graphique}).$$

Section $X = 0$.

Cette section correspond au système de valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0, \quad \text{pour laquelle} \quad Y = 0, \quad Z = 12.31 \cos^2 \theta \quad (\text{portion de droite } D'), \\ \cos \theta = 0, \quad \text{d'où il résulte :} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \pm 0.66 \rho^3, \\ Z = 12.26 \rho^3 \end{array} \right. \quad (\text{parabole semi-cubique } P_2'), \\ \rho^3 = \frac{\sin^3 \theta}{0.66}, \quad \text{d'où :} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \pm 1.22 \sin^3 \theta, \\ Z = 6.26 \sin^3 \theta + 12.31, \end{array} \right. \quad \text{avec les conditions :} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq Y^2 \leq 1.5, \\ Z > 12.31. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cette dernière courbe se compose des deux portions de droite D'' du graphique, dont l'équation peut encore s'écrire :

$$Z = \pm 5.07 Y + 12.31.$$

Coefficient angulaire des tangentes aux lignes de niveau.

Les lignes de niveau satisfaisant à la condition $Z = C^{\text{te}}$, on a :

$$24.52 \rho d\rho - 12.31 \sin 2\theta d\theta = 0,$$

d'où :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{2\rho} \sin 2\theta.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= \left\{ -0.66 \rho^3 + \rho \sin^3 \theta - \frac{1}{4\rho} (\sin 2\theta)^3 \right\} \sin \theta, \\ \frac{dY}{d\theta} &= \left\{ 0.66 \rho^3 + \rho \cos^3 \theta + \frac{1}{4\rho} (\sin 2\theta)^3 \right\} \cos \theta, \end{aligned}$$

et par suite, le long d'une ligne de niveau :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{0.66 \rho^4 + \rho^3 \cos^2 \theta + \sin^3 \theta \cos^2 \theta}{-0.66 \rho^4 + \rho^3 \sin^2 \theta - \sin^3 \theta \cos^2 \theta} \cotg \theta.$$

La droite D' est un lieu de points doubles, car pour ces points $\frac{dY}{dX} = -\cotg \theta$ et aux valeurs θ et $-\theta$ correspondent deux tangentes à la ligne de niveau, symétriques par rapport aux plans $Y = 0$ et $X = 0$.

Les droites D'' sont des lieux de points doubles. On a, pour ces points :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3 + 2 \cos^2 \theta}{\sin 2\theta}$$

et aux valeurs θ et $-\theta$ correspondent deux tangentes symétriques.

La tangente aux lignes de niveau est parallèle à OY pour :

$$\sin \theta = 0,$$

c'est-à-dire pour les points de la parabole semi-cubique P_4' , et pour :

$$-0.66 \rho^4 + \rho^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0.$$

La parabole P_4' est ainsi un lieu de sommets à tangente parallèle à OY.

La deuxième condition correspond à :

$$\sin^4 \theta - (1 - \rho^2) \sin^2 \theta - 0.66 \rho^4 = 0.$$

Les racines sont toujours réelles, mais elles doivent satisfaire à :

$$0 \leq \sin^2 \theta \leq 1,$$

ce qui exige :

$$\rho^2 \left(1 - \frac{2}{3} \rho^2 \right) > 0$$

ou

$$0 \leq \rho^2 \leq 1.5.$$

Les valeurs frontières de ρ^2 donnent :

$$\sin^2 \theta = \begin{cases} +1, \\ +1; \end{cases} \quad \cos^2 \theta = \begin{cases} 0; \\ 0; \end{cases}$$

d'où :

$$0 \leq Z \leq 18.5,$$

avec

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{ou} \quad Y = \pm 1.22$$

comme valeurs extrêmes.

Ces points limites sont des points de rebroussement, car on a simultanément :

$$\frac{dX}{d\theta} = 0, \quad \frac{dY}{d\theta} = 0.$$

En ces points, la tangente est parallèle à OY.

La tangente aux lignes de niveau est parallèle à OX pour $\cos \theta = 0$, c'est-à-dire pour les points de la parabole semi-cubique P_1' , qui est ainsi un lieu de sommets à tangente parallèle à OX.

Les graphiques ci-dessous résument l'ensemble de la discussion précédente.

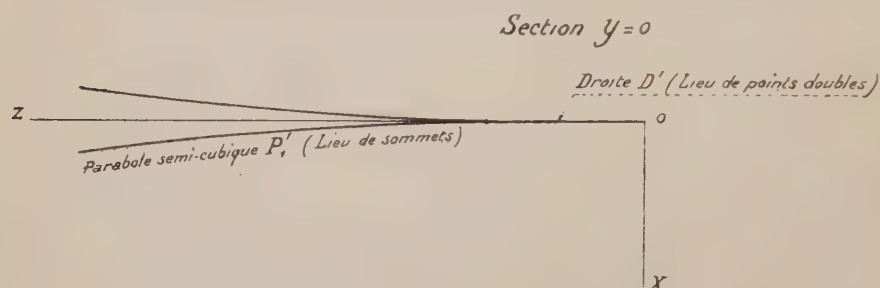


FIG. 15.

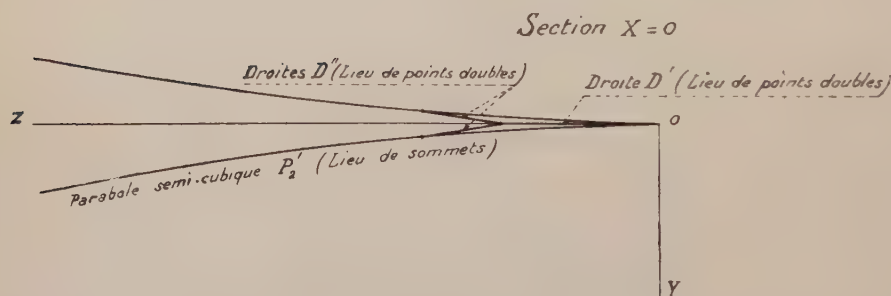


FIG. 16.

Étude de quelques lignes de niveau et comparaison avec les résultats de l'expérience.

Ligne de niveau $Z = 45^{\text{mm}}$ (176.5 avec l'unité de longueur adoptée).

Si l'on fixe les valeurs de Z et de θ , les équations en z des deux nappes de caustique permettent de déterminer la valeur correspondante de ρ^3 , d'où l'on déduit X et Y .

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
0°	43.26	6.57	^{mm.} 1.67	^{mm.} 0
45°	43.13	6.56	0.59	0.59
90°	43.01	6.55	0	1.67

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
0°	13.4	3.66	49.04	^{mm.} 8.34	^{mm.} 0
45°	13.9	3.73	51.84	5.90	6.55
90°	14.4	3.80	54.72	0	9.31

Dans les graphiques qui suivent, les résultats calculés sont figurés en trait plein, et les résultats de l'expérience en pointillé. Il est à noter que pour cette cote, le graphique expérimental ne comprend pas la première nappe, les rayons correspondants sont arrêtés par la monture de la lentille.

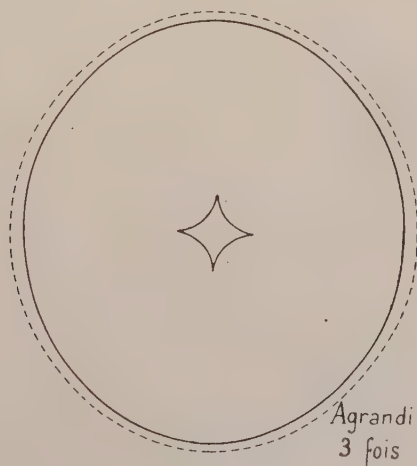


FIG. 17.

Ligne de niveau $Z = 33^{\text{mm}}$ (129.4).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
0°	31.71	5.63	^{mm.} 1.43	^{mm.} 0
45°	31.59	5.62	0.50	0.50
90°	31.47	5.61	0	1.43

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
0°	9.55	3.1	29.6	^{mm.} 5.05	^{mm.} 0
45°	10.05	3.17	31.86	3.54	4.11
90°	10.55	3.25	34.30	0	5.84

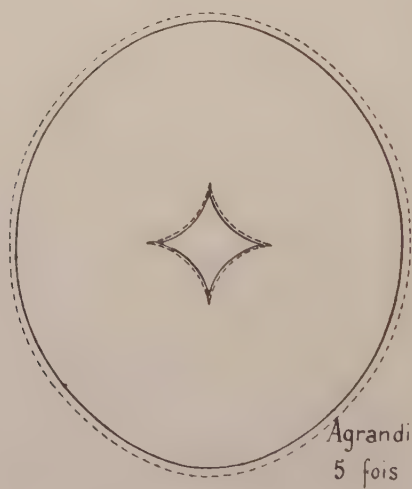


FIG. 18.

Ligne de niveau $Z = 23^{\text{mm}}$ (90.2).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	λ	Y
0°	22.10	4.7	^{mm.} 1.20	^{mm.} 0
45°	21.98	4.68	0.42	0.42
90°	21.86	4.67	0	1.19

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
0°	6.35	2.52	16	^{mm.} 2.70	^{mm.} 0
45°	6.85	2.61	17.88	1.91	2.38
90°	7.35	2.71	19.9	0	3.40



FIG. 19.

Ligne de niveau $Z=16^{\text{mm}}$ (62.74).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
			mm.	mm.
0"	15.37	3.92	1	0
45°	15.25	3.90	0.35	0.35
90°	15.13	3.89	0	0.99

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
				mm.	mm.
0°	4.11	2.02	8.3	1.41	0
45°	4.61	2.15	9.91	1	1.38
90°	5.11	2.26	11.55	0	1.96

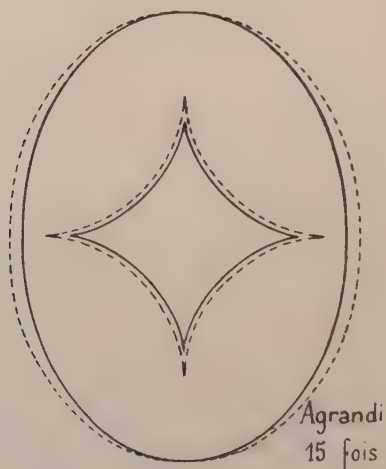


FIG. 20.

Ligne de niveau $Z = 11^{\text{mm}}$ (43.13).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
0°	10.57	3.25	^{mm.} 0.83	^{mm.} 0
45°	10.44	3.23	0.29	0.29
90°	10.32	3.21	0	0.82

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
0°	2.51	1.6	4	^{mm.} 0.68	^{mm.} 0
45°	3.01	1.73	5.2	0.35	0.89
90°	3.52	1.88	6.6	0	1.12

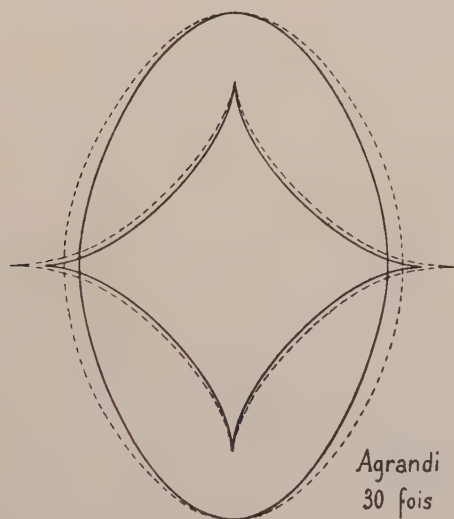


FIG. 21.

Ligne de niveau $Z = 8^{\text{mm}}$ (31.37).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
			mm.	mm.
0°	7.69	2.77	0.70	0
45°	7.56	2.75	0.24	0.24
90°	7.44	2.72	0	0.69

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
				mm.	mm.
0°	1.55	1.25	1.93	0.33	0
45°	2.05	1.43	2.93	0.22	0.48
90°	2.56	1.60	4	0	0.68

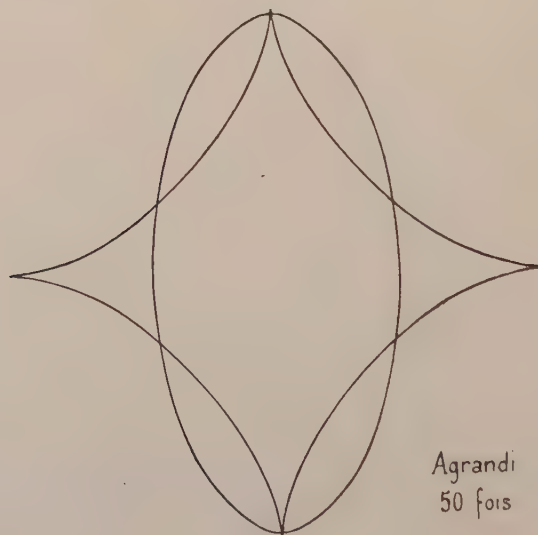


FIG. 22.

Ligne de niveau $Z = 4^{\text{mm}} 7$ (18.5).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
0°	4.53	2.13	^{mm.} 0.54	^{mm.} 0
45°	4.41	2.10	0.19	0.19
90°	4.29	2.07	0	0.52

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
0°	0.50	0.70	0.35	^{mm.} 0.06	^{mm.} 0
45°	1	1	1	0.03	0.21
90°	1.51	1.23	1.86	0	0.32

Le graphique calculé ne peut être comparé quantitativement au graphique expérimental étant donné la petitesse de celui-ci. Mais les séries d'expériences, faites sous une incidence supérieure à 10°, montrent que l'accord qualitatif n'est pas douteux.

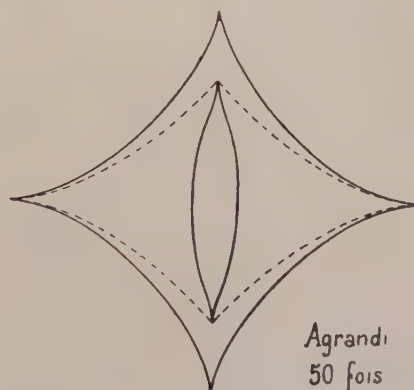


FIG. 23.

Ligne de niveau $Z = 3^{\text{mm}}$ (12.31).

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	X	Y
0°	3	1.73	^{mm.} 0.44	^{mm.} 0
45°	2.89	1.70	0.15	0.15
90°	2.77	1.66	0	0.42

2^e NAPPE.

θ	ρ^2	ρ	ρ^3	X	Y
0°	0	0	0	^{mm.} 0	^{mm.} 0
45°	0.50	0.70	0.35	0.02	0.10
90°	1	1	1	0	0.17

La deuxième nappe de caustique présente un point double sur l'axe. Les points où la tangente est parallèle à OY, sont donnés par les deux conditions :

$$\begin{cases} 12.31 = 12.26\rho^3 + 12.31 \cos^2 \theta, \\ \sin^4 \theta - (1 - \rho^2) \sin^2 \theta - 0.66\rho^4 = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} X = \pm 0^{\text{mm}}027, \\ Y = \pm 0^{\text{mm}}165. \end{cases}$$

Comme précédemment, les comparaisons ne peuvent se faire ici que qualitativement, en utilisant les expériences faites sous des incidences supérieures à 10°.

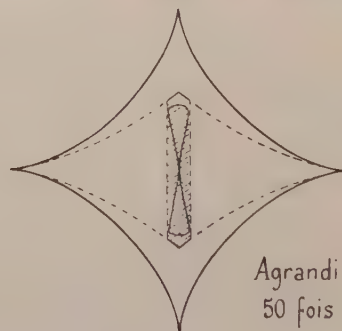


FIG. 24.

Ligne de niveau $Z = 0^{\text{mm}}33$ (1.33).

La première nappe de caustique ne présente que deux points de rebroussement, les deux autres sont remplacés par des sommets où la tangente est parallèle à Ox_1 .

La deuxième nappe de caustique, comme dans le cas précédent, présente la forme d'un 8, mais sa hauteur est seulement de l'ordre de $0^{\text{mm}}01$.

Les expériences faites sous des incidences supérieures à 10° montrent encore un accord qualitatif non douteux.

1^{re} NAPPE.

θ	ρ^a	ρ	X	Y
0°	0.32	0.56	^{mm.} 0.144	^{mm.} 0
45°	0.20	0.44	0.040	0.040
90°	0.08	0.21	0	0.073

2^e NAPPE.

θ	ρ^a	ρ	ρ^s	X	Y
71°	0	0	0	^{mm.} 0	^{mm.} 0
80°	0.078	0.280	0.022	0.010	0.003
90°	0.108	0.320	0.034	0	0.006

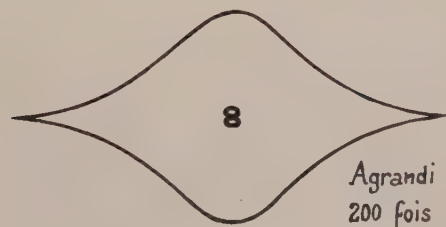


FIG. 25.

En résumé, l'on peut dire que pour des inclinaisons de l'ordre de 10° , notre solution de deuxième approximation est pleinement valable; elle représente presque parfaitement les faits. Les écarts entre les courbes calculées et observées sont faibles, et on peut très vraisemblablement les attribuer à l'incertitude du zéro expérimental qui ne peut guère être fixé qu'avec une approximation de l'ordre du millimètre.

CAS D'UNE INCLINAISON SUPÉRIEURE A 10° .

Les calculs effectués dans le paragraphe précédent montrent que l'accord avec l'expérience reste satisfaisant au point de vue qualitatif. Mais l'accord quantitatif disparaît, et il n'est pas besoin de développer ces calculs pour s'en rendre compte. En effet, on obtient d'une part une surface symétrique par rapport aux plans $Y=0$ et $X=0$, et, d'autre part, une surface qui n'admet plus que le plan $Y=0$ comme plan de symétrie. Cette dissymétrie, par rapport au plan $X=0$, apparaît nettement sur toutes nos photographies à partir de la série de 15° .

Les conclusions de ce chapitre sont donc :

- 1) *Notre solution de première approximation est valable jusqu'aux inclinaisons de l'ordre de 5° .*
 - 2) *Notre solution de deuxième approximation est valable jusqu'aux inclinaisons de l'ordre de 10° .*
-

CONCLUSION.

En résumé, les principaux résultats obtenus dans le Mémoire qui précède sont les suivants :

1° Il a été établi une méthode de calcul, qui permet d'obtenir jusqu'au 5^e ordre, les équations d'un rayon lumineux, après la traversée d'un système optique centré.

2° J'ai obtenu l'équation différentielle qui doit être satisfaite, au 4^e ordre près, par les coordonnées des courbes diaphragmes à employer, lorsqu'on se propose d'isoler les normales de rayons réfractés, qui forment à la sortie d'un système centré une surface développable.

3° L'équation précédente a été résolue et des solutions de première et de deuxième approximation ont été considérées en particulier. La première approximation correspond à un système de droites concourantes et à un système de circonférences concentriques; la deuxième approximation, à un système de coniques non homofocales. C'est là un résultat qui peut être utilisé avec avantage par une technique expérimentale rationnelle permettant l'étude des caustiques.

4° Les géodésiques des caustiques considérées ont été déterminées approximativement en utilisant les premières courbes diaphragmes.

5° Une méthode directe nous a donné les équations de ces surfaces caustiques, d'une part avec une approximation identique à la précédente et, d'autre part, avec une approximation supérieure. La concordance des résultats obtenus dans le premier cas légitime les méthodes employées.

6° Des vérifications expérimentales effectuées avec une lentille plan convexe ont montré un accord presque parfait entre les résultats calculés et ceux observés, jusqu'aux incidences de l'ordre de 10°.

7° Au cours des vérifications expérimentales, nous avons eu à déterminer l'indice du verre constituant une lentille. Le dernier procédé utilisé n'a pas, à ma connaissance, été employé, et il me paraît susceptible d'une précision comparable à celle des meilleurs réfractomètres usuels.

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ :

Étude chimique des verres.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 7 juin 1913.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

PAUL APPELL.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Paris, le 7 juin 1913.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

